一 般 拓 扑 学

[美] S·李普舒茨 著
陈昌平 汪礼礽 王学锋 译
陈 美 廉 校

华东师范大学出版社

Seymour Lipschutz

Theory and Problems of

GENERAL TOPOLOGY

一般拓朴学

〔美〕S·李普舒茨　著

陈昌平　汪礼礽　王学锋　译

陈美廉　校

华东师范大学出版社出版

（上海市中山北路3663号）

新华书店上海发行所发行　　宜兴县南漕印刷厂印刷

1982年12月第一版　　1982年12月第一次印刷

开本 787×1092　1/32　印张 14.625　字数：3'0千字

印数：1——7000册

统一书号：13135-010　　定价：1.50元

内 容 简 介

本书阐述一般拓扑学的基本概念和方法。为了便于初学者使用，前三章论述了点集论的最基本的内容，并在附录中对实数理论作了简要的介绍。全书包含有解答的习题共650道，其中带有详细解答的普通习题410道，这部分材料是本书的有机组成部分，许多定理的证明是用习题解答的形式给出的。除这部分材料外，书中另有“补充习题”393道（一部分提供了答案），供读者练习之用。

本书取材注意了精选，叙述方法注意了深入浅出，层次分明，富于启发。本书可作为高等师范院校及其他高等学校“一般拓扑学”教材或参考书使用，也宜于作为自学的书籍使用。

书中的外文名字，除大家熟悉的那些如欧基里德、笛卡尔等外，一律不予翻译而将其英文原名写上。原书中的斜体字（表示重要名词，术语）在译文中以黑体字表之，并附上原文。

序

一般拓扑学，又名点集拓扑学，近年来已经成为研究生和大学生所必须具备的极其重要的数学基础的一部分。本书可用作正式拓扑学课程的教本，或作为任何流行的标准拓扑学教科书的补充读物。对于想对这门课程获得全面而严格的入门知识的读者，本书也是一本有价值的参考书。

每章开头都是结合直观的和描述性的材料清晰地叙述适当的定义、原理和定理。接着给出由浅入深的有解答的习题和补充习题。习题解答用来使理论具体化和作详细的论述，特别把注意力集中在一些细致的论点上。如果对这些论点不作阐述，就会使学生感到缺乏坚实的基础。同时，为了使学习更有成效，习题解答中还对基本原理作必要的重复。许多定理的证明包含在习题解答中。补充习题是用来对每章内容作一次总的复习。

本书所论及的课题包括拓扑空间、度量空间和赋范空间的基本性质，隔离性公理，紧致性，积拓扑以及连通性。被证明的定理包括 Urysohn 引理和度量化定理、Tychonoff 乘积定理和 Baire 纲定理。最后关于函数空间的一章研究了逐点收敛拓扑，一致收敛拓扑和紧致收敛拓扑。另外，最初三章介绍了必需的集合论概念，第四章叙述了直线和平面上的拓扑，附录列出了实数的一些基本原理。

包括在本书中的材料要比大多数初等教程所可能涉及的

多一些。这样做是为了使本书更为灵活，在作为参考书使用时更为有效和进一步启发读者对拓扑学的兴趣。

最后，我要感谢我的一些朋友和同事，特别是 Joam Landman 博士，他们提出过极宝贵的建议和对原稿作过审阅。我还要为 Schaum 出版公司的工作人员的热忱合作，特别对 Jeffrey Albert 和 Alan Hopenwasser 两位，表示我的谢意。

Seymour Lipschutz

Temple 大学

1965 年 5 月

目　录

第一章 集与关系

集、元素（Sets, elements）

集这个概念出现于数学的各个分支。直观地说，一个集就是确切地指定了的一堆事物。我们通常用大写字母 A, B, X, Y, …等表示集。构成一个集的那些事物称为这个集的**元素**(element)，并通常用小写字母 a, b, x, y, …等表示。命题“p 是 A 的一个元素”或它的同义语“p 属于 A”记为

$$p\in A。$$

这个命题的否定命题记为 $p\notin A$。

有两种方法可用于说明某一特定的集。一种方法是：若可能的话，一一列出它的所有元素。例如

$$A=\{a, e, i, o, u\}$$

表示集 A，它的元素是字母 a, e, i, o 和 u。注意：在这记法中，元素之间用逗号分开，全体元素用花括号 { } 括起来。第二种方法是指出性质，这性质正好表明该集的元素的特征。例如

$$B=\{x: x是整数, x>0\},$$

这记号读作：“B 是这样一些 x 的集，x 是整数，并且 x 是大于零”，它表示以正整数为元素的集 B。在这种记法中，通常是用 x 表示集的任意元素，冒号“：”意为“这样”，逗号“,”意为“并且”。

例 1.1 上面的集 B 也可以记为

$$B=\{1, 2, 3, \cdots\},$$

注意：$-6\notin B$, $3\in B$, $\pi\notin B$。

例 1.2 以下所定义的实直线上的区间经常在数学中出现，其中 a 与 b 是实数，且 $a<b$。

a 至 b 的开区间 $=(a, b)=\{x: a<x<b\}$,

a 至 b 的闭区间 $=[a, b]=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$,

a 至 b 的左开右闭区间 $=(a, b]=\{x: a<x\leqslant b\}$,

a 至 b 的左闭右开区间 $=[a, b)=\{x: a\leqslant x<b\}$.

左开右闭区间和左闭右开区间也称为“**半开**区间”(half-open interval)。

两个集 A 与 B 若有相同的元素，即：A 的每个元素均属于 B，而 B 的每个元素也均属于 A，则称 A 与 B **相等**(equal)，并记为 $A=B$。$A=B$ 的否定命题记为 $A\neq B$。

例 1.3 设 $E=\{x: x^2-3x+2=0\}$, $F=\{2, 1\}$, $G=\{1, 2, 2, 1\}$, 则 $E=F=G$。注意：一个集不依赖于它的元素的表现形式，当它的元素被重复写出或它们的排列次序被改变时，集本身保持不变。

集有“**有限集**”(finite set)与“**无限集**”(infinite set)之分。一个集若由 n 个不同的元素组成，其中 n 为某一正整数，则此集称为有限集；反之称为无限集。特别地，若一个集只含一个元素，则称为**单元素集**(singleton set)。

子集，母集（Subsets, supersets）

若集 A 的每个元素都属于集 B，即若 $x\in A$ 就有 $x\in B$，则称 A 是 B 的一个**子集**(subset)，称 B 是 A 的一个**母集**(superset)。这事实记为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A。$$

这时也说：A **含在**(is contained in) B 中，或说 B **含**(contains) A。

$A \subset B$ 的否定命题记为 $A \not\subset B$ 或 $B \not\supset A$，其意为：有这样的 $x \in A$ 使得这个 $x \notin B$。

例 2.1 考察以下诸集

$$A=\{1, 3, 5, 7, \cdots\},$$
$$B=\{5, 10, 15, 20, \cdots\},$$
$$C=\{x: x \text{ 是素数}, x>2\}$$
$$=\{3, 5, 7, 11, \cdots\},$$

则 $C \subset A$，因大于 2 的素数必须是奇数。另一方面，$B \not\subset A$，因 $10 \in B$ 但 $10 \notin A$。

例 2.2 我们用 $\mathbf{N}$ 表示正整数集；$\mathbf{Z}$ 表示整数集；$\mathbf{Q}$ 表示有理数集；$\mathbf{R}$ 表示实数集。从而

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}。$$

注意：$A \subset B$ 并不排除 $A=B$ 的可能性。事实上，集相等的定义可复述如下：

定义 两个集 A 与 B 相等的充要条件是 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$。

当 $A \subset B$ 而 $A \neq B$ 时，称 A 为 B 的一个**真子集**(proper subset)，或说 B 真含 A。注意：有些作者用符号 $\subseteq$ 来叙述子集，而符号 $\subset$ 只用于叙述真子集。

由上述诸定义得出下面第一个定理：

定理 1.1 设任给三个集 A, B, C，则

(i) $A \subset A$;

(ii) 若 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$，则 $A=B$;

(iii) 若 $A \subset B$ 同时 $B \subset C$，则 $A \subset C$。

宇宙集与空集（Universal and null sets）

在集论的任何应用中，所考察的集都是某一个确定的集的一些子集。这个确定的集称为**“宇宙集”**（universal set），在本章中我们用字母 U 来表示它。

为方便起见，也引入**“空集”**（empty set 或 null set）的概念。所谓空集是指这样的集，它不含有任何元素。空集被看作是一个有限集，并且是任何其他集的一个子集，它用符号 $\varnothing$ 来表示。这样，对于任何集 A 都有 $\varnothing \subset A \subset U$。

例 3.1 在平面几何中，宇宙集就是平面上一切点所构成的集。

例 3.2 设 $A=\{x: x^2=4, x \text{是奇数}\}$，则 A 是空集，即 $A=\varnothing$。

例 3.3 设 $B=\{\varnothing\}$，则 $B \neq \varnothing$，因为 B 含有一个元素。

组、簇、空间（Classes, collections, families and spaces）

时常会讨论以集作为元素的集。例如一个直线集中的每个元素是一条直线，而每条直线本身是一个点集。为便于区别起见，我们有时用**“组”**(class 或 collection)、**“簇”**(family)这样的同义字来代替“集”这个字，即：把集之集称为“集组”，把组之集称为“组簇”，用这种说法时，**子组**（subclass 或 subcollection）或**子簇**(subfamily)的含义就和子集类似。

例 4.1 组 $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ 的元素是集 $\{2, 3\}$，$\{2\}$ 与 $\{5, 6\}$。

例 4.2 设已给一集 A，则所谓 A 的**“幂集”**(power set)

是指 A 的一切子集所构成的组，它通常记为 $\mathscr{P}(A)$ 或 2^A。例如，若

$$A=\{a, b, c\},$$

则

$$\mathscr{P}(A)=\{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}。$$

一般说，当 A 是由 n 个元素构成的有限集时，$\mathscr{P}(A)$ 含 2^n 个元素。

空间(space) 这个词是用来表示具备某种形式的数学结构的非空集。例如：向量空间，度量空间，拓扑空间等等。在这种情况下，空间的元素称为**点**(point)。

集运算（Set operations）

两个集 A 和 B 的**并**(union)，记为 $A\cup B$，是指这样的集，它由 A 的一切元素和 B 的一切元素所构成。即

$$A\cup B=\{x; x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

其中"或"是表示"与/或"的意思。

两个集 A 和 B 的**交**(intersection)记为 $A\cap B$，是指这样的集，它由既属于 A 又属于 B 的那些元素所构成。即

$$A\cap B=\{x; x\in A \text{ 又 } x\in B\}。$$

若 $A\cap B=\varnothing$，即若 A 和 B 没有公共的元素，则称 A 和 B **互斥或不相交**(disjoint or non-intersecting)。若在一个集组 $\mathscr{A}$ 中，任何两个集都互斥，则 $\mathscr{A}$ 称为**互斥集组**(disjoint class of sets)。

B 的相对于 A 的**相对补集**(relative complement)，或简称为 A 与 B 之**差**(difference)，记为 $A\setminus B$，是指这样的集，它由

属于A而不属于B的那些元素所构成，即

$$A\setminus B=\{x:\ x\in A,\ x\notin B\}。$$

注意：$A\setminus B$和B是互斥的，即

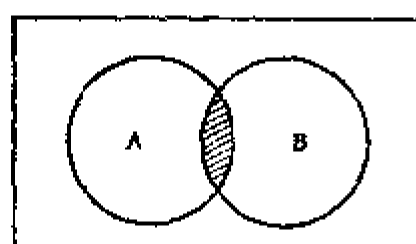
$$(A\setminus B)\cap B=\varnothing。$$

集A的**绝对补集**或简称为A的**补集**，记为A^c，是指这样的集，它由不属于A的那些元素所组成，即

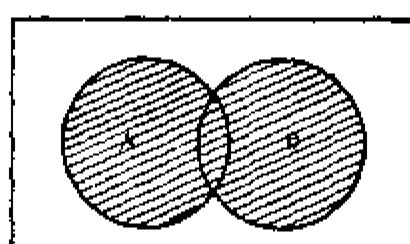
$$A^c=\{x:\ x\in U,\ x\notin A\}。$$

换句话说，A^c是宇宙集U与A之差。

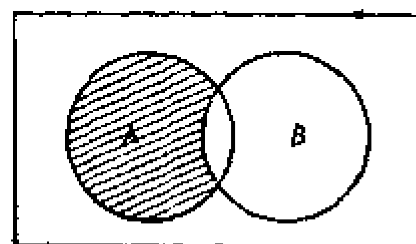
例5.1 下列图形称为Venn图，用以表示上述的集的运算，其中宇宙集U由整个矩形的区域所表示，一般的集都用U内区域表示。



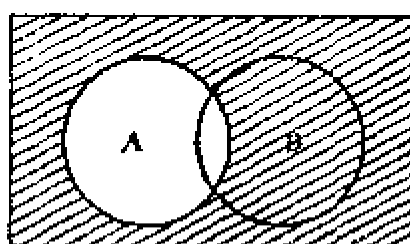
阴影部分是$A\cap B$



阴影部分是$A\cup B$



阴影部分是$A\setminus B$



阴影部分是A^c

上述集的运算满足下表中所列的一些规律。

定理1.2 集运算满足下表中所列的规律：

集的代数规律	
幂等律(Idempotent laws)	
(1a) $A\cup A=A$	(1b) $A\cap A=A$
结合律(Assoiative laws)	
(2a) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	(2b) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
交换律(Commutative laws)	
(3a) $A\cup B=B\cup A$	(3b) $A\cap B=B\cap A$
分配律(Distributive laws)	
(4a) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	(4b) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
恒等律(Identity laws)	
(5a) $A\cup\varnothing=A$	(5b) $A\cap U=A$
(6a) $A\cup U=U$	(6b) $A\cap\varnothing=\varnothing$
互补律(Complement laws)	
(7a) $A\cup A^c=U$	(7b) $A\cap A^c=\varnothing$
(8a) $(A^c)^c=A$	(8b) $U^c=\varnothing$, $\varnothing^c=U$
De Morgan 律	
(9a) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$	(9b) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

注意 以上每一规律都是由和它相似的逻辑规律导出的。例如：

$$A\cap B=\{x:\ x\in A\ 又\ x\in B\}$$
$$=\{x:\ x\in B\ 又\ x\in A\}$$
$$=B\cap A。$$
这里我们利用了这样的事实，即命题“p 与 q”（记作($p\wedge q$)逻辑等价于“q 与 p”（即 $q\wedge p$）。

关于集的包含关系和上列的集运算之间有以下定理：

定理 1.3 下列的每一条件都和 $A\subset B$ 等价：

(i) $A\cap B=A$； (ii) $A\cup B=B$； (iii) $B^c\subset A^c$；

(iv) $A\cap B^c=\varnothing$； (v) $B\cup A^c=U$。

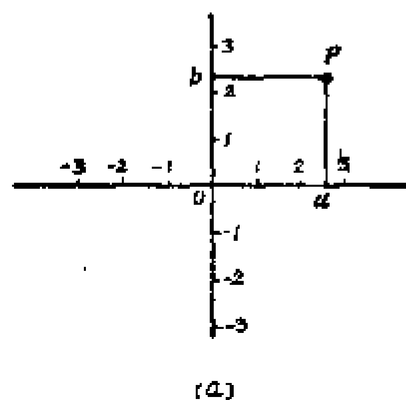
积集（Product sets）

设已知两个集 A 与 B，则 A 与 B 的**积集**（product set），$A\times B$，是由一切有序偶 $\langle a, b\rangle$ 所构成，其中 $a\in A$ 而 $b\in B$。即

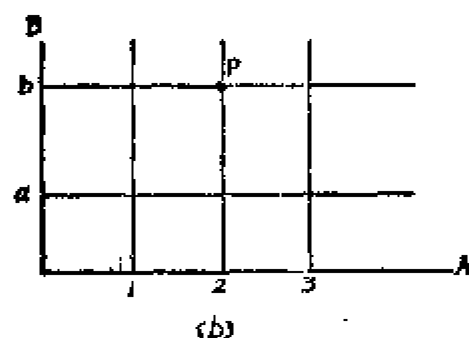
$$A\times B=\{\langle a, b\rangle:\ a\in A,\ b\in B\}。$$

一个集与它自己的积，例如 $A\times A$ 通常记为 A^2。

例 6.1 读者熟悉的笛卡儿平面就是 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$（见图 a）。其中每一点 p 表示一个有序实数偶 $\langle a, b\rangle$，反之每个实数偶表示其中的一点。



(a)



(b)

例6.2 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，则

$A\times B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$（见图b）。

因为A和B不包含很多元素，$A\times B$可以象图a—b那样用坐标图表示。其中铅垂的直线通过A的点而水平的直线通过B的点，这样$A\times B$可表示为这些直线的六个交点。图中的点 p 表示有序偶 $\langle 2,b\rangle$。一般说，若集A有 s 个元素而集B有 t 个元素，则 $A\times B$ 含有 $s\cdot t$ 个元素。

注意 概念“有序偶”$\langle a,b\rangle$的严格定义是

$$\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}。$$

由此定义，可证下面的序性质：

$$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \text{ 导致 } a=c \text{ 与 } b=d。$$

积集的概念可自然地推广到有限个集上去。集 A_1，A_2，…，A_m 的积集，记为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_m \quad 或 \quad \prod_{i=1}^{m} A_i$$

是由一切m有序组 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_m\rangle$ 所构成，其中对每个 i 有 $a_i\in A_i$。

关系（Relations）

由集A到集B的一个**二元关系**(binary relation)(或简称**关系** (relation)) R 对于 $A\times B$中的每个有序偶 $\langle a,b\rangle$ 恰好赋于下列二命题之一：

（i）“a 关联于 b”，记为 aRb。

（ii）“a 不关联于 b”，记为 $a\not R b$。

由集 A 到此同一集 A 的一个关系称为 **A 中的一个关系** (a relation in A)。

例 7.1 对于任何一个集组而言，集的包含关系就是这个集组的一种关系。因为对其中的任意两个集 A 与 B 来说，或者是 $A \subset B$，或者是 $A \not\subset B$。

注意：由集 A 到集 B 的任何一种关系唯一地确定了 $A \times B$ 的一个子集 R^* 如下：

$$R^* = \{\langle a, b \rangle: aRb\}。$$

另一方面，$A \times B$ 的任何一个子集 R^* 都可以按以下方式规定一个由 A 到 B 的关系 R：

$$aRb \text{ 的充要条件是 } \langle a, b \rangle \in R^*。$$

鉴于由 A 到 B 的关系与 $A \times B$ 的子集有上述的对应关系，我们将关系重新定义如下：

定义 由 A 到 B 的一个关系 R 是 $A \times B$ 的一个子集。

设已给由 A 到 B 的一个关系 R，则由 R 中所有元素的第一个坐标所构成的集称为这个关系 R 的**定义域**(domain)，而所有元素的第二个坐标所构成的集称为 R 的**值域**(range)。即

$$R \text{ 的定义域} = \{a: \langle a, b \rangle \in R\},$$

$$R \text{ 的 值 域} = \{b: \langle a, b \rangle \in R\}。$$

R 的**逆**(inverse)，记为 R^{-1}，是由 B 到 A 的一个关系，其定义如下：

$$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle: \langle a, b \rangle \in R\}。$$

注意 R^{-1} 可以由 R 中有序偶经过对换得到。

例 7.2 考察 $A = \{1, 2, 3\}$ 中的关系

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

则R的定义域为$\{1, 2\}$，R的值域为$\{2, 3\}$，

$$R^{-1}=\{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}。$$

注意：A中的关系R和R^{-1}分别地等价于关系$<$和$>$，

即　$\langle a, b\rangle\in R$的充要条件为$a<b$，

$\langle a, b\rangle\in R^{-1}$的充要条件为$a>b$。

设已给集A，则A中的**恒等关系** (identity relation)，记为Δ或Δ_A，是指$A\times A$中两个坐标相同的那些有序偶所构成的集，即

$$\Delta_A=\{\langle a, a\rangle: a\in A\}。$$

恒等关系也称为**对角线关系**(diagonal)，这名称是由于其中的元素在$A\times A$的坐标图中的位置而得来的。

等价关系（Equivalence relations）

集A中的一个关系R（也就是$A\times A$的一个子集R）称为**等价关系**(equivalence relation)，若它满足以下三条公理：

[E_1]　对每个$a\in A$有$\langle a, a\rangle\in R$。

[E_2]　若$\langle a, b\rangle\in R$，则$\langle b, a\rangle\in R$。

[E_3]　若$\langle a, b\rangle\in R$又$\langle b, c\rangle\in R$则$\langle a, c\rangle\in R$。

一般说，满足[E_1]的关系称为**自反的**(reflexive)；满足[E_2]的关系称为**对称的** (symmetric)；满足[E_3]的关系称为**传递的** (transitive)。因此，关系R是一个等价关系的充要条件是它是自反的、对称的又是传递的。

例 8.1　考察集包含关系$\subset$，由定理1.1知，对任何集A，都有$A\subset A$成立，并且

若$A\subset B$又$B\subset C$，则$A\subset C$。

因此$\subset$是自反的又是传递的。但另一方面

由 $A\subset B$ 及 $A\neq B$ 导致 $B\not\subset A$。

故 $\subset$ 不是对称的，从而它不是一个等价关系。

例 8.2 在欧氏几何中，三角形的相似关系是一种等价关系。因为设 α, β, γ 为任何三角形，则 (i) α 和它自己相似；(ii) 若 α 相似于 β，则 β 相似于 α；(iii) 若 α 相似于 β，β 又相似于 γ，则 α 相似于 γ。

设 R 为 A 中的一个等价关系，则元素 $a\in A$ 的**等价类**(equivalence class)，记为$[a]$，是指和 a 处于关系 R 的元素全体所构成的集。即：

$$[a]=\{x:\langle a,\ x\rangle\in R\}。$$

A 的**等价类集**，记为 A/R，称为A对R的**商集**(quotient)。即：

$$A/R=\{[a]:\ a\in A\}。$$

商集 A/R 有以下诸性质：

定理 1.4 设R为A中的一个等价关系，$[a]$为元素 $a\in A$ 的等价类。则

(i) 对于每个 $a\in A$ 有 $a\in[a]$；

(ii) $[a]=[b]$ 的充要条件是 $\langle a,\ b\rangle\in R$；

(iii) 若 $[a]\neq[b]$，则 $[a]$与$[b]$ 互斥。

设 $\mathscr{A}$ 为集A的某些非空子集所构成的集组，若 $\mathscr{A}$ 满足以下条件，则称 $\mathscr{A}$ 为A的一个**分割**(partition)：

(1) 每个 $a\in A$ 必含于 $\mathscr{A}$ 的某个元素之中；

(2) $\mathscr{A}$ 中的元素两两互斥。

从而，由上面的定理得到关于**等价关系的基本定理**(fundamental theorem of equivalence relation)如下：

定理 1.5 设R是A中的一个等价关系，则商集 A/R 是A的

一个分割。

例 8.3 设 R_5 为整数集 $\mathbf{Z}$ 中的一个关系，其定义如下：

$$x \equiv y \pmod 5)。$$

这关系读作："x 按模 5 同余于 y"，其含义为：$x-y$ 被 5 所整除。则 R_5 是 $\mathbf{Z}$ 中的一个等价关系，在 $\mathbf{Z}/R_5$ 中恰好有五个等价类：

$$E_0=\{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}=[-10]=[-5]$$
$$=[0]=[5]=\cdots,$$
$$E_1=\{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11, \cdots\}=[-9]=[-4]$$
$$=[1]=[6]=\cdots,$$
$$E_2=\{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\}=[-8]=[-3]$$
$$=[2]=[7]=\cdots,$$
$$E_3=\{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}=[-7]=[-2]$$
$$=[3]=[8]=\cdots,$$
$$E_4=\{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}=[-6]=[-1]$$
$$=[4]=[9]=\cdots。$$

注意：每个整数 x 可唯一地表示为 $5q+r$，其中 $0\leqslant r<5$，r 是余数。这个 x 是等价类 E_r 中的一个元素。

这些等价类两两互斥，并且有

$$\mathbf{Z}=E_0\cup E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4。$$

关系的复合（Composition of relations）

设 U 是由 A 到 B 的一个关系；V 是由 B 到 C 的一个关系，即：$U\subset A\times B$，$V\subset B\times C$。则由此可得一个由 A 到 C 的关系如下：它由 $A\times C$ 中具有下述性质的一切有序偶 $\langle a, c\rangle$ 所构成：

有 $b\in B$ 使 $\langle a, b\rangle\in U$ 同时 $\langle b, c\rangle\in V$。这个新的关系

称为U与V的**复合**（composition），并记为 $V\circ U$（请读者注意：U写在后面，V写在前面。有些作者将这个关系记为$U\circ V$）。

为方便起见，引入下列符号：

$\exists$ 表示“存在着”

s.t. 表示“使得”

$\forall$ 表示“对所有的”

$\Longrightarrow$ 表示“导致”

利用这些符号，可把 $V\circ U$ 表示如下：

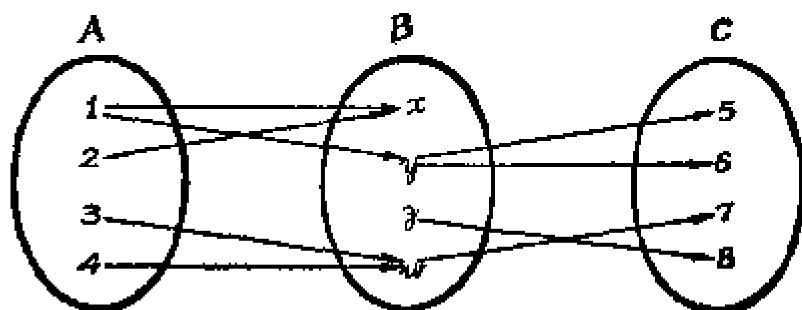
$$V\circ U=\{\langle x, y\rangle: x\in A, y\in C; \exists b\in B \text{ s.t. } \langle x, b\rangle\in U, \langle b, y\rangle\in V\}。$$

例 9.1 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$， $B=\{x, y, z, w\}$，$C=\{5, 6, 7, 8\}$。令

$U=\{\langle 1, x\rangle, \langle 1, y\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 3, w\rangle, \langle 4, w\rangle\}$。

$V=\{\langle y, 5\rangle, \langle y, 6\rangle, \langle z, 8\rangle, \langle w, 7\rangle\}$。

就是说，U是A到B的一个关系，V是B到C的一个关系。这两个关系可以图示如下：



从而：

$\langle 1, 5\rangle\in V\circ U$ 因 $y\in B$ 且 $\langle 1, y\rangle\in U, \langle y, 5\rangle\in V$。

$\langle 1, 6\rangle\in V\circ U$ 因 $y\in B$ 且 $\langle 1, y\rangle\in U, \langle y, b\rangle\in V$。

$\langle 3, 7\rangle\in V\circ U$ 因 $w\in B$ 且 $\langle 3, w\rangle\in U, \langle w, 7\rangle\in V$。

$\langle 4, 7\rangle \in V\circ U$ 因 $w\in B$ 且 $\langle 4, w\rangle\in U$, $\langle w, 7\rangle\in V$。
其他的有序偶都不属于 $V\circ U$，就是说

$$V\circ U=\{\langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 3, 7\rangle, \langle 4, 7\rangle\}。$$

注意：$V\circ U$ 是由具有以下特点的那些有序偶 $\langle a, b\rangle$* 所构成：在上面的图示中，有两个相连接的箭头形成的一条"路"把 $a\in A$ 和 $b\in C$ 联结起来。

例 9.2 设 U 与 V 是 $\mathbf{R}$ 中的关系，其定义如下：

$$U=\{\langle x, y\rangle: x^2+y^2=1\},$$
$$V=\{\langle y, z\rangle: 2y+3z=4\},$$

则从 $x^2+y^2=1$ 和 $2y+3z=4$ 这两个方程消去变量 y，就得到 U 与 V 的复合 $V\circ U$。换言之，

$$V\circ U=\{\langle x, z\rangle: 4x^2+9z^2-24z+12=0\}。$$

例 9.3 设 $\mathbf{N}$ 为正整数集，又设 R 表示 $\mathbf{N}$ 中的关系 $<$，即：$\langle a, b\rangle\in R$ 的充要条件是 $a<b$，因此 $\langle a, b\rangle\in R^{-1}$ 的充要条件是 $a>b$，则有

$$\begin{aligned}R\circ R^{-1}&=\{\langle x, y\rangle: x, y\in\mathbf{N};\ \exists b\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ \langle x, b\rangle\in R^{-1}, \langle b, y\rangle\in R\}。\\&=\{\langle x, y\rangle: x, y\in\mathbf{N};\ \exists b\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ b<x, b<y\}\\&=\{\mathbf{N}\setminus\{1\}\}\times\{\mathbf{N}\setminus\{1\}\}\\&=\{\langle x, y\rangle: x, y\in\mathbf{N};\ x, y\neq 1\}。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R^{-1}\circ R&=\{\langle x, y\rangle: x, y\in\mathbf{N};\ \exists b\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ \langle x, b\rangle\in R, \langle b, y\rangle\in R^{-1}\}\\&=\{\langle x, y\rangle: x, y\in\mathbf{N};\ \exists b\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ b>x, b>y\}\\&=\mathbf{N}\times\mathbf{N}。\end{aligned}$$

注意：$R\circ R^{-1}\neq R^{-1}\circ R$。

---

* 译注：原文为 $\langle x, y\rangle$，因为此例中 x，y 为集 B 中两个元素，为避免混淆，改用 $\langle a, b\rangle$。

习 题 解 答

集，元素，子集

1．设 $A=\{x: 3x=6\}$，问是否 $A=2$？

解：A 是由单一元素 2 组成的集，即 $A=\{2\}$。数 $2\in A$ 但 $2\neq A$。注意一个元素 p 与单元素集 $\{p\}$ 有本质差别。

2．下列诸集中哪些是相等的：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{\varnothing\}$。

解：两两不相等。集 $\{0\}$ 含数 0 一个元素。集 $\varnothing$ 不含任何元素，它是一个空集。集 $\{\varnothing\}$ 也含一个元素，这个元素就是空集 $\varnothing$。

3．下列诸集中哪些是空集？

(i) $X=\{x: x^2=9, 2x=4\}$，

(ii) $Y=\{x: x\neq x\}$，

(iii) $Z=\{x: x+8=8\}$。

解：(i) 没有任何元素既满足 $x^2=9$ 又满足 $2x=4$，因此 $X=\varnothing$。

(ii) 我们总是假设任何事物就是它自己。因此 Y 是空集。事实上，有些课本是将空集定义为 $\varnothing=\{x: x\neq x\}$ 的。

(iii) 数 0 满足 $x+8=8$；因此 $Z=\{0\}$，从而 $Z\neq\varnothing$。

4．求证：$A=\{2, 3, 4, 5\}$ 不是 $B=\{x: x$ 是偶数$\}$ 的子集。

解：必须证明 A 至少有一个元素不属于 B。因 $3\in A$ 而 $3\notin B$，所以 A 不是 B 的子集。

5．求证定理 1.1 之 (iii)：若 $A\subset B$ 同时 $B\subset C$，则 $A\subset C$。

解：必须证明A的每个元素也属于C。设$x\in A$，由$A\subset B$得$x\in B$；但$B\subset C$故$x\in C$。因此证得，由$x\in A$导致$x\in C$，即$A\subset C$。

6. 求证：若A是空集$\varnothing$的一个子集，则$A=\varnothing$。

解：空集是任何集的子集；特别地，$\varnothing\subset A$。但由假设$A\subset\varnothing$。因此由定义 1.1 得$A=\varnothing$。

7. 写出集$S=\{1, 2, 3\}$的势集$\mathscr{P}(S)$。

解：S的势集是S的所有子集的组。S的子集是$\{1, 2, 3\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$和空集$\varnothing$。因此，

$$\mathscr{P}(s)=\{S, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}.$$

注意S共有$2^3=8$个子集。

8. 写出集$S=\{3, \{1, 4\}\}$的势集$\mathscr{P}(s)$。

解：首先注意S包含两个元素：3 和集$\{1, 4\}$。因此$\mathscr{P}(s)$含有$2^2=4$个元素：S，$\varnothing$，含有 3 的单元素集$\{3\}$，含有集$\{1, 4\}$的单元素集$\{\{1, 4\}\}$。换言之，

$$\mathscr{P}(s)=\{S, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, \varnothing\}.$$

集运算

9. 设$U=\{1,2,\cdots,8, 9\}$，$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6, 8\}$，$C=\{3, 4, 5, 6\}$。写出 (i) A^c，(ii) $(A\cap C)^c$，(iii) $B\setminus C$，(iv) $(A\cup B)^c$。

解：(i) A^c由在U中而不在A中的元素组成；因此，$A^c=\{5, 6, 7, 8, 9\}$。

(ii) $A\cap C$由既在A中又在C中的元素组成；因此，$A\cap C=\{3, 4\}$，$(A\cap C)^c=\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

(iii) $B\setminus C$由在B内而不在C内的元素组成；因此，

$B\setminus C=\{2, 8\}$。

(iv) $A\cup B$ 由在A内或在B内（或既在A内又在B内）的元素组成；因此，$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, \}$，$(A\cup B)^c=\{5, 7, 9\}$。

10．求证：$(A\setminus B)\cap B=\varnothing$。

解：$(A\setminus B)\cap B=\{x;\ x\in B, x\in A\setminus B\}$

$$=\{x;\ x\in B, x\in A, x\notin B\}$$

$$=\varnothing。$$

因为没有一个元素 x 能同时满足 $x\in B$ 与 $x\notin B$。

11．求证 De Morgan 定律：$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$。

解：$(A\cup B)^c=\{x;\ x\notin A\cup B\}=\{x;\ x\notin A, x\notin B\}$

$$=\{x;\ x\in A^c, x\in B^c\}=A^c\cap B^c。$$

12．求证：$B\setminus A=B\cap A^c$。

解：$B\setminus A=\{x;\ x\in B, x\notin A\}$

$$=\{x;\ x\in B, x\in A^c\}=B\cap A^c。$$

13．求证分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

解：$A\cap(B\cup C)=\{x;\ x\in A;\ x\in B\cup C\}$

$$=\{x;\ x\in A;\ x\in B \text{ 或 } x\in C\}$$

$$=\{x;\ x\in A, x\in B;\ \text{或 } x\in A, x\in C\}$$

$$=\{x;\ x\in A\cap B \text{ 或 } x\in A\cap C\}$$

$$=(A\cap B)\cup(A\cap C)。$$

注意在上面第三步推理中我们利用了类似的逻辑规律

$$p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r),$$

其中 $\wedge$ 读作“和”，$\vee$ 读作“或”。

14．求证：对任何集A与B，有 $A\cap B\subset A\subset A\cup B$。

解：设 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 同时 $x\in B$。特别地，$x\in A$，

从而，$A\cap B\subset A$。若 $x\in A$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$，即 $x\in A\cup B$。因此 $A\subset A\cup B$。换句话说，

$$A\cap B\subset A\subset A\cup B。$$

15．求证定理 1.3(i)：$A\subset B$ 的充要条件是 $A\cap B=A$。

解：假设 $A\subset B$。又设 $x\in A$，则由假设 $x\in B$，因此 $x\in A$ 同时 $x\in B$，即 $x\in A\cap B$，从而 $A\subset A\cap B$。但由上题 $A\cap B\subset A$，故

$$A\cap B=A。$$

另一方面，假设 $A\cap B=A$，则特别地 $A\subset A\cap B$。但由上题 $A\cap B\subset B$，因此由定理 1.1，$A\subset B$。

积集，关系，关系的复合

16．设 $A=\{a, b\}$，$B=\{2, 3\}$，$C=\{3, 4\}$ 求：

(i) $A\times(B\cup C)$

(ii) $(A\times B)\cup(A\times C)$。

解：(i) 首先计算 $B\cup C=\{2, 3, 4\}$，则

$$A\times(B\cup C)=\{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle b, 4\rangle\}。$$

(ii) 首先求 $A\times B$ 及 $A\times C$：

$$A\times B=\{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}。$$

$$A\times C=\{\langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle b, 4\rangle\}。$$

再算它们的并：

$$(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$=\{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 4\rangle\}。$$

注意：由(i)和(ii)得

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)。$$

17. 求证：$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$。

解：$A\times(B\cap C)=\{\langle x, y\rangle: x\in A, y\in B\cap C\}$

$=\{\langle x, y\rangle: x\in A, y\in B, y\in C\}$

$=\{\langle x, y\rangle: \langle x, y\rangle\in A\times B, \langle x, y\rangle\in A\times C\}$

$=(A\times B)\cap(A\times C)$。

18. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 3, 5\}$；R 是由 A 到 B 的关系$<$，即：$\langle a, b\rangle\in R$ 的充要条件为 $a<b$。

(i) 把 R 作为有序偶的集写出来，

(ii) 把 R 在 $A\times B$ 的坐标图上标出，

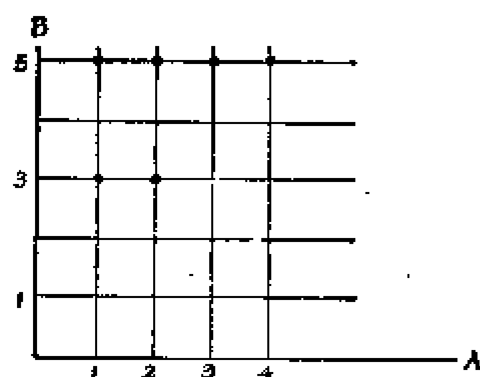
(iii) 求 B 的定义域，值域，并求 R^{-1}，

(iv) 求 $R\circ R^{-1}$。

解：(i) R 是由满足 $a<b$ 的那些有序偶 $\langle a, b\rangle\in A\times B$ 所构成，故

$R=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 4, 5\rangle\}$。

(ii) 把 R 在 $A\times B$ 的坐标图上标出，如下图所示。



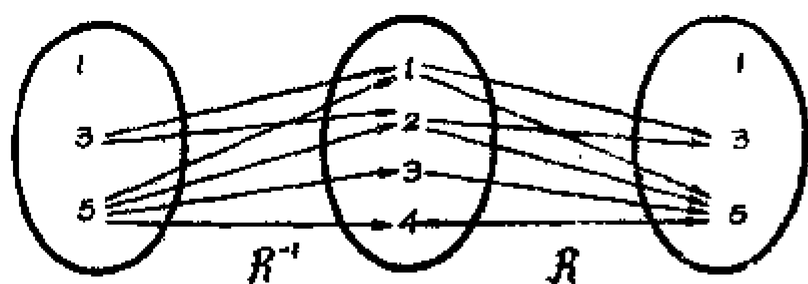
(iii) R 中所有元素的第一个坐标所构成的集是 R 的定义域；因此 R 的定义域 $=\{1, 2, 3, 4\}$。

R 中所有元素的第二个坐标所构成的集是 R 的值域；因此 R 的值域 $=\{3, 5\}$。

R 中所有元素的第一和第二个坐标互相交换后得到的集是 R^{-1}；因此

$R^{-1}=\{\langle 3, 1\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 5, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 5, 4\rangle\}$。

(iv) 为了求 $R\circ R^{-1}$，首先把 R^{-1} 和 R 的图形构造出来如



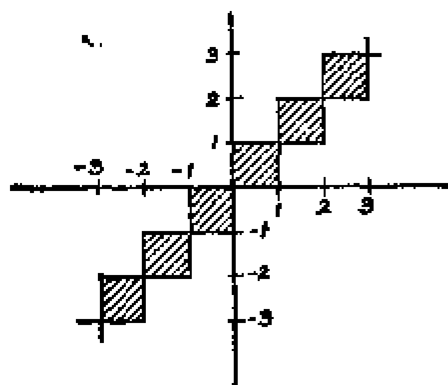
下图。注意在乘积 $R\circ R^{-1}$ 中第二个因子 R^{-1} 应先构造，所以

$$R\circ R^{-1}=\{\langle 3,3\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 5,5\rangle\}。$$

19．设 T 是实数集 $\mathbf{R}$ 中的一个关系，其定义如下：

若有整数 n 使 $x\in[n,n+1]$ 同时 $y\in[n,n+1]$，则 xTy。试画关系 T 的图。

解：T 由以下有阴影的正方形组成。



20．设 T 为实数集 $\mathbf{R}$ 中的一个关系，其定义如下：xTy 的充要条件是 $0\leqslant x-y\leqslant 1$。

（i）把 T 与 T^{-1} 作为 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 的子集表示出来，并画图。

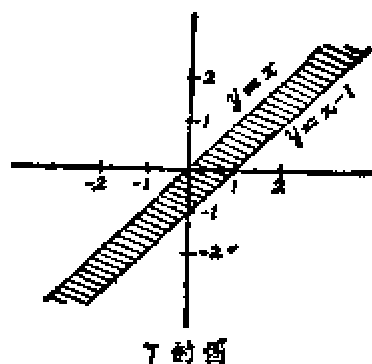
（ii）求证：$T\circ T^{-1}=\{\langle x,z\rangle:|x-z|\leqslant 1\}$。

解：(i) $T=\{\langle x,y\rangle: x,y\in\mathbf{R},0\leqslant x-y\leqslant 1\}$

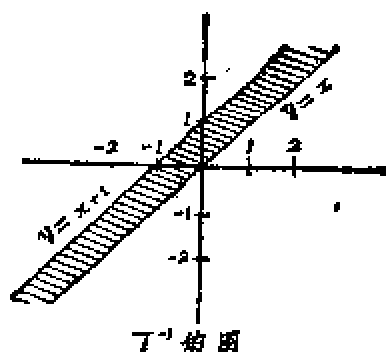
$$T^{-1}=\{\langle x,y\rangle:\langle y,x\rangle\in T\}$$

$$=\{\langle x,y\rangle: x,y\in\mathbf{R},0\leqslant y-x\leqslant 1\}。$$

关系 T 与 T^{-1} 图示如下：



T 的图



T^{-1} 的图

(ii) 由关系的复合定义得到

$$T\circ T^{-1}=\{\langle x,\ z\rangle:\ \exists y\in\mathbf{R}\ \text{s.t.}\ \langle x,\ y\rangle\in T^{-1},\ \langle y,\ z\rangle\in T\}$$
$$=\{\langle x,\ z\rangle:\ \exists y\in\mathbf{R}\ \text{s.t.}\ \langle y,\ x\rangle,\ \langle y,\ z\rangle\in T\}$$
$$=\{\langle x,\ z\rangle:\ \exists y\in\mathbf{R}\ \text{s.t.}\ 0\leqslant y-x\leqslant 1,\ 0\leqslant y-z\leqslant 1\}。$$

设 $S=\{\langle x,\ z\rangle:\ |x-z|\leqslant 1\}$，需要证明 $T\circ T^{-1}=S$。

设 $\langle x,\ z\rangle\in T\circ T^{-1}$，则 $\exists\, y$ s.t. $0\leqslant y-x,\ y-z\leqslant 1$，但

$$0\leqslant y-x,\ y-z\leqslant 1\Longrightarrow y-z\leqslant 1$$
$$\Longrightarrow y-z\leqslant 1+y-x$$
$$\Longrightarrow x-z\leqslant 1。$$

还有 $0\leqslant y-x,\ y-z\leqslant 1\Longrightarrow y-x\leqslant 1$

$$\Longrightarrow y-x\leqslant 1+y-z$$
$$\Longrightarrow z-x\leqslant 1。$$

换句话说，$0\leqslant y-x,\ y-z\leqslant 1\Longrightarrow -1\leqslant x-z\leqslant 1$，

而　　$-1\leqslant x-z\leqslant 1$　即是　$|x-z|\leqslant 1$。

从而，　$\langle x,\ z\rangle\in S$，　即　$T\circ T^{-1}\subset S$。

再设　$\langle x,\ z\rangle\in S$；　则　$|x-z|\leqslant 1$。

令　　$y=\max(x,\ z)$；

则　　$0\leqslant y-x\leqslant 1$　及　$0\leqslant y-z\leqslant 1$，

于是　$\langle x,\ z\rangle$ 也 $\in T\circ T^{-1}$，即：$S\subset T\circ T^{-1}$。

因此　　$T\circ T^{-1}=S$。

21．求证：对任何两个关系 $R\subset X\times Y$ 及 $S\subset Y\times Z$ 有

$$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}。$$

解：$(S\circ R)^{-1}=\{\langle z,x\rangle:\ \langle x,z\rangle\in S\circ R\}$

$=\{\langle z,x\rangle:\ \exists y\in Y\text{ s.t. }\langle x,y\rangle\in R,\ \langle y,z\rangle\in S\}$

$=\{\langle z,x\rangle:\ \exists y\in Y\text{ s.t. }\langle z,y\rangle\in S^{-1},\ \langle y,x\rangle\in R^{-1}\}$

$=R^{-1}\circ S^{-1}$。

22．求证：对任何三个关系 $R\subset W\times X$，$S\subset X\times Y$ 及 $T\subset Y\times Z$ 有 $(T\circ S)\circ R=T\circ(S\circ R)$。

解：$(T\circ S\circ R)$

$=\{\langle w,z\rangle:\ \exists x\in X\text{ s.t. }\langle w,x\rangle\in R,\ \langle x,z\rangle\in T\circ S\}$

$=\{\langle w,z\rangle:\ \exists x\in X,\ \exists y\in Y\text{ s.t. }\langle w,x\rangle\in R,\ \langle x,y\rangle\in S,\ \langle y,z\rangle\in T\}$

$=\{\langle w,z\rangle:\ \exists y\in Y\text{ s.t. }\langle w,y\rangle\in S\circ R,\ \langle y,z\rangle\in T\}$

$=T\circ(S\circ R)$。

自反的，对称的，传递的及等价的关系

23．求证：设 R 是 A 中一个关系，即：$R\subset A\times A$，则

(i) R 为自反的充要条件是 $\Delta_A\subset R$。

(ii) R 为对称的充要条件是 $R=R^{-1}$。

(iii) R 为传递的充要条件是 $R\circ R\subset R$。

(iv) 若 R 自反则 $R\circ R\supset R$ 且 $R\circ R$ 自反。

(v) 若 R 对称则 $R\circ R^{-1}=R^{-1}\circ R$。

(vi) 若 R 传递则 $R\circ R$ 为传递。

解：(i) 对角线关系 $\Delta_A=\{\langle a, a\rangle: a\in A\}$。$R$ 为自反的充要条件是对每个 $a\in A$ 有 $\langle a, a\rangle\in R$，而 $\langle a, a\rangle\in R$ 的充要条件是 $\Delta_A\subset R$。

(ii) 可直接由 R^{-1} 的定义和对称性推出。

(iii) 设 $\langle a, c\rangle\in R\circ R$；则 $\exists b\in A$ s.t. $\langle a, b\rangle\in R$ 及 $\langle b, c\rangle\in R$。但由传递性，$\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle\in R$ 导致 $\langle a, c\rangle\in R$。由此推出 $R\circ R\subset R$。

另一方面，设 $R\circ R\subset R$。若 $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle\in R$，则 $\langle a, c\rangle\in R\circ R\subset R$，换句话说，$R$ 是传递的。

(iv) 设 $\langle a, b\rangle\in R$，现在，$R\circ R=\{\langle a, c\rangle: \exists b\in A \text{ s.t. } \langle a, b\rangle\in R, \langle b, c\rangle\in R\}$。因 $\langle a, b\rangle\in R$，且因 R 为自反而有 $\langle b, b\rangle\in R$，故 $\langle a, b\rangle\in R\circ R$，即 $R\subset R\circ R$。从而，$\Delta_A\subset R\subset R\circ R$ 导致 $R\circ R$ 也为自反。

(v)
$$\begin{aligned}R\circ R^{-1}&=\{\langle a, c\rangle: \exists b\in A \text{ s.t. } \langle a, b\rangle\in R^{-1}, \\ &\qquad \langle b, c\rangle\in R\}\\ &=\{\langle a, c\rangle: \exists b\in A \text{ s.t. } \langle a, b\rangle\in R, \langle b, c\rangle\in R^{-1}\}\\ &=R^{-1}\circ R。\end{aligned}$$

(vi) 设 $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle\in R\circ R$，由(iii)，$R\circ R\subset R$，因此 $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle\in R$。故 $\langle a, c\rangle\in R\circ R$，即 $R\circ R$ 是传递的。

24. 已给 $X=\{1, 2, 3\}$ 中的一个关系

$$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\},$$

问：R 是否 (i) 自反；(ii) 对称；(iii) 传递？

解：(i) R 非自反，因 $2\in X$ 但 $\langle 2, 2\rangle\notin R$。

(ii) R 为对称，因 $R^{-1}=R$。

(iii) R 非传递，因 $\langle 3, 2\rangle\in R$ 及 $\langle 2, 3\rangle\in R$ 但 $\langle 3, 3\rangle\notin R$。

25. 集 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 为正整数有序偶构成之集。设 R 为 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 中的关系 $\simeq$，其定义如下：

$\langle a, b\rangle\simeq\langle c, d\rangle$ 的充要条件为 $ad=bc$。

求证：R 是一个等价关系。

解：注意对每个 $\langle a, b\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$\langle a, b\rangle\simeq\langle a, b\rangle$，因为 $ab=ba$，因此 R 是自反的。

假设 $\langle a, b\rangle\simeq\langle c, d\rangle$，则 $ad=bc$，也就是 $cb=da$，因此 $\langle c, d\rangle\simeq\langle a, b\rangle$，从而 R 是对称的。

再设 $\langle a, b\rangle\simeq\langle c, d\rangle$ 及 $\langle c, d\rangle\simeq\langle e, f\rangle$，则 $ad=bc$ 且 $cf=de$，于是 $(ad)(cf)=(bc)(de)$，两边约去公因子得 $af=be$。从而 $\langle a, b\rangle\simeq\langle e, f\rangle$。因此是传递的。

因为 R 是自反、对称和传递的，故 R 是一个等价关系。

注意：若把有序偶 $\langle a, b\rangle$ 记成分式 $\frac{a}{b}$，则上述关系 R 实际上就是通常两个分式相等的定义，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，它的充要条件是 $ad=bc$。

26. 求证定理 1.4：设 R 为 A 中的一个等价关系，$[a]$ 表示 $a\in A$ 的等价类，则：

（i）对每个 $a\in A$，有 $a\in[a]$。

（ii）$[a]=[b]$ 的充要条件为 $\langle a, b\rangle\in R$。

（iii）若 $[a]\neq[b]$，则 $[a]$ 与 $[b]$ 互斥。

解：(i) 因 R 是自反的，所以对每个 $a\in A$ 有 $\langle a, a\rangle\in R$，因此 $a\in[a]$。

(ii) 假设 $\langle a, b\rangle\in R$，要证明的是 $[a]=[b]$。设 $x\in[b]$，则 $\langle b, x\rangle\in R$；但由假设 $\langle a, b\rangle\in R$，故由传递性得 $\langle a, x\rangle$

$\in R$。从而 $x\in[a]$，即$[b]\subset[a]$。为了证明$[a]\subset[b]$，注意由对称性可知，$\langle a, b\rangle\in R$ 导致 $\langle b, a\rangle\in R$，于是由同样的推理可得 $[a]\subset[b]$。这就证明了 $[a]=[b]$。

另一方面，若$[a]=[b]$，则由自反性，$b\in[b]=[a]$，即 $\langle a, b\rangle\in R$。

(iii) 我们来证明与它等价的逆否命题，即若 $[a]\cap[b]\neq\varnothing$，则 $[a]=[b]$。

若 $[a]\cap[b]\neq\varnothing$。则 $\exists x\in A$ 使 $x\in[a]\cap[b]$，因此 $\langle a, x\rangle\in R$ 且 $\langle b, x\rangle\in R$。由对称性得 $\langle x, b\rangle\in R$；而由传递性得 $\langle a, b\rangle\in R$。于是由(ii)推得$[a]=[b]$。

补 充 习 题

集合，元素，子集

27. 判断下列集合中哪个是空集：

(i) $\{x: 1<x<2, x\in\mathbf{R}\}$,

(ii) $\{x: 1<x<2, x\in\mathbf{N}\}$,

(iii) $\{x: x\in\varnothing\}$,

(iv) $\{x: x^2<x, x\in R\}$。

28. 设 $A=\{1, 2, \cdots, 8, 9\}$，　$B=\{2, 4, 6, 8\}$，
　　$C=\{1, 3, 5, 7, 9, \}$，$D=\{3, 4, 5\}$，
　　$E=\{3, 5\}$。

如果我们给下面的条件，这些集合中哪个能与X相等？

(i) X 与 B 不相交，(ii) $X\subset D$ 且 $X\not\subset B$，(iii) $X\subset A$ 且 $X\not\subset C$，(iv) $X\subset C$ 且 $X\not\subset A$。

29. 指出下列各个断言是对还是错。

（i）一个有限集的每一个子集是有限的。

（ii）一个无限集的每一个子集是无限的。

30．讨论下列三个集之间的所有包含关系和元素关系：$\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$。

31．求证闭区间$[a, b]$不是开区间(a, b)的一个子集。

32．求 $U=\{0, 1, 2\}$ 的势集 $\mathscr{P}(U)$ 和 $V=\{0, \{1, 2\}\}$ 的势集 $\mathscr{P}(V)$。

33．指出下列每个断言是对还是错，其中 S 是任一非空集，2^S 是 S 的势集。

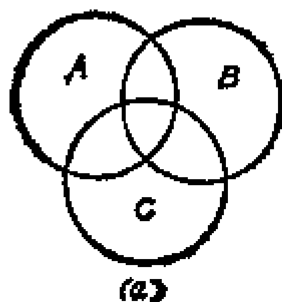
(i) $S \in 2^S$，(ii) $S \subset 2^S$，(iii) $\{S\} \in 2^S$，(iv) $\{S\} \subset 2^S$。

集的运算

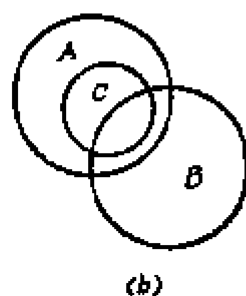
34．设 $A=\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$，$B=\{1, 2, \{1, 2\}\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$，$B\setminus A$。

35．将下面每一个 Venn 图用阴影画出：

（i）$A\cap(B\cup C)$，　　（ii）$C\setminus(A\cap B)$。



(a)



(b)

36．求证并用 Venn 图表示：$A^c\setminus B^c=B\setminus A$。

37．(i) 求证：$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$。

(ii) 举一个例子说明 $A\cup(B\setminus C)\neq(A\cup B)\setminus(A\cup C)$。

38．求证：$2^A\cap 2^B=2^{A\cap B}$；$2^A\cup 2^B\subset 2^{A\cup B}$。举一个例子说明 $2^A\cup 2^B\neq 2^{A\cup B}$。

39．求证定理 1.3：下列每一个条件等价于 $A\subset B$：

(i) $A\cap B=A$，　(ii) $A\cup B=B$，　(iii) $B^c\subset A^c$，

(iv) $A\cap B^c=\varnothing$，　(v) $B\cup A^c=U$。

（注意：$A\cap B=A$ 等价于 $A\subset B$ 已在习题 15 中证明了。）

40．求证 $A\subset B$ 当且仅当对任何 C 有

$$(B\cap C)\cup A=B\cap(C\cup A)。$$

积集，关系，关系的复合

41．求证：$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

42．用有序偶的定义，即 $\langle a, b\rangle=\{\{a\},\{a, b\}\}$，求证 $\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle$ 当且仅当 $a=c$ 同时 $b=d$。

43．试确定从具有 m 个元素的集合到具有 n 个元素集合的不同关系的数目，其中 m 与 n 为正整数。

44．设 R 是由 $R=\{\langle x, y\rangle;\ x, y\in \mathbf{N},\ x+2y=12\}$ 所定义的正整数集 $\mathbf{N}$ 中的关系：

(i) 将 R 写成一个有序偶的集合。(ii) 求 R 的定义域、值域及 R^{-1}。(iii) 求 $R\circ R$。(iv) 求 $R^{-1}\circ R$。

45．考虑 $\mathbf{N}$ 中的关系

$R=\{\langle 4, 5\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 6\rangle, \langle 7, 6\rangle, \langle 3, 7\rangle\}$。

(i) 求 R 的定义域、值域及 R^{-1}，(ii) 求 $R\circ R$，(iii) 求 $R^{-1}\circ R$。

46．设 U 与 V 是由 $U=\{\langle x, y\rangle;\ x^2+2y=5\}$ 和 $V=\{\langle x, y\rangle;\ 2x-y=3\}$ 所定义的 $\mathbf{R}$ 中的关系，(i) 求 $V\circ U$，(ii) 求 $U\circ V$。

47．考虑 $\mathbf{R}$ 中的关系 $<$ 与 $\leqslant$，求证，$<\cup\Delta=\leqslant$，其中 Δ 是对角线。

等价关系

48．指出下列每一断言是对还是错，设 R 与 S 是集 A 中的（非空）关系。

（1）若 R 是对称的，则 R^{-1} 也是对称的。

（2）若 R 是自反的，则 $R\cap R^{-1}\neq\varnothing$。

（3）若 R 是对称的，则 $R\cap R^{-1}\neq\varnothing$。

（4）若 R 与 S 是传递的，则 $R\cup S$ 也是传递的。

（5）若 R 与 S 是传递的，则 $R\cap S$ 也是传递的。

（6）若 R 与 S 是对称的，则 $R\cup S$ 也是对称的。

（7）若 R 与 S 是对称的，则 $R\cap S$ 也是对称的。

（8）若 R 与 S 是自反的，则 $R\cap S$ 也是自反的。

49．考虑正整数的有序偶集合 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，设 $\simeq$ 是由

$$\langle a,b\rangle\simeq\langle c,d\rangle \quad \text{iff} \quad a+d=b+c$$

所定义的 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 中的关系。

（i）求证 $\simeq$ 是一个等价关系。

（ii）求 $\langle 2,5\rangle$ 的等价类，即 $[\langle 2,5\rangle]$。

50．设 $\sim$ 是 $\mathbf{R}$ 中的关系，由 $x\sim y$ iff $x-y$ 是整数所定义，求证 $\sim$ 是一个等价关系。

51．设 $\sim$ 是笛卡儿平面 $\mathbf{R}^2$ 中的关系，由

$$\langle x,y\rangle\sim\langle w,z\rangle \text{ iff } x=w$$

所定义，求证 $\sim$ 是一个等价关系，并画出几个等价类。

52．设 a 与 b 是任意实数，并设 $\sim$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的关系，由

$$\langle x,y\rangle\sim\langle w,z\rangle \text{ iff } \exists k\in\mathbf{Z}$$

使得 $x-w=ka$，$y-z=kb$ 所定义。

求证 $\sim$ 是一等价关系，并画出几个等价类。

补充习题答案

27. (ii)与(iii)中的集合是空集。

31. $a\in[a, b]$ 但 $a\notin(a, b)$。

32. $\mathscr{P}(V)=\{V, \{0\}, \{\{1, 2, 3\}\}, \varnothing\}$。

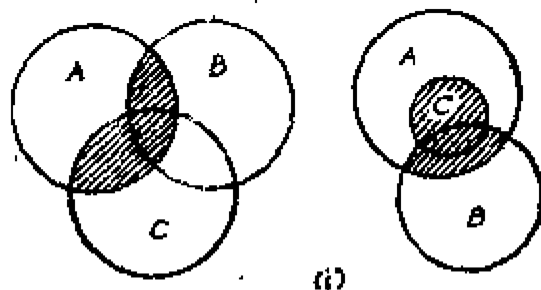
33. (i) 对，(ii) 错，(iii) 错，(iv) 对。

34. $A\cup B=\{1, 2, 3, \{1,2\}, \{1, 2, 3\}\}$,

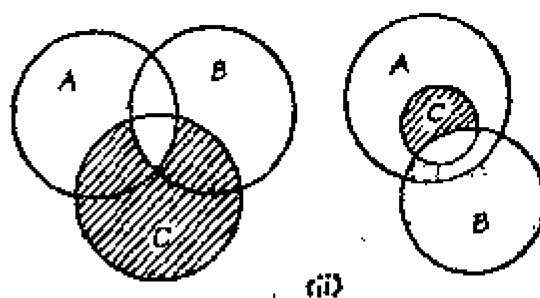
$A\cap B=\{1, 2\}$, $A\setminus B=\{3, \{1, 2, 3\}\}$,

$B\setminus A=\{\{1, 2\}\}$。

35.



(i)



(ii)

37. (ii) $C=\varnothing$, $A=B\neq\varnothing$。

38. 例：$A=\{1\}$, $B=\{2\}$。

43. 2^{mn}。

44. (i) $R=\{\langle 10, 1\rangle, \langle 8, 2\rangle, \langle 6, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle\}$。

(ii) R 的定义域$=\{10, 8, 6, 4, 2\}$,

R 的值域$=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$R^{-1}=\{\langle 1, 10\rangle, \langle 2, 8\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 2\rangle\}$。

(iii) $R\circ R=\{\langle 8, 5\rangle\langle 4, 4\rangle\}$。

(iv) $R^{-1}\circ R=\{\langle 10,10\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 6, 6\rangle,\langle 4, 4\rangle,\langle 2, 2\rangle\}$。

45．(i) R 的定义域$=\{4, 1, 7, 3\}$，

R 的值域$=\{5, 4, 6, 7\}$，

$R^{-1}=\{\langle 5, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 6, 4\rangle, \langle 6, 7\rangle, \langle 7, 3\rangle\}$。

(ii) $R\circ R^{-1}=\{\langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 3, 6\rangle\}$。

(iii) $R^{-1}\circ R=\{\langle 4, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 4, 7\rangle, \langle 7, 4\rangle,$
$\langle 7, 7\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$。

46．$V\circ U=\{\langle x, y\rangle: x^2+y=2\}$，

$U\circ V=\{\langle x, y\rangle: 4x^2-12x+2y+4=0\}$。

48．(1) 对，(2) 对，(3) 对，(4) 错，(5) 对，(6) 对，(7) 对，(8) 对。

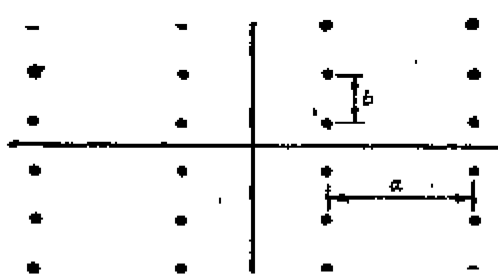
49．(ii) $[(2, 5)]=\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 7\rangle, \cdots, \langle n, n+3\rangle, \cdots\}$。

51．



等价类是一些铅垂线。

52．



上面给出一个典型的等价类。水平方向相邻点之间的距离是 a，铅垂方向相邻点之间的距离是 b。

第二章 函 数

函数（Functions）

设对于集A的每个元素，集B有唯一的一个元素被指定来和它对应，则这些对应的全体f称为由 **A（上）到 B（内）**（from A into B 或 on A into B）的一个**函数**（function）或**映照**（mapping），并记为

$$f: A \to B \quad 或 \quad A \xrightarrow{f} B,$$

在B内唯一地被f指定来和$a \in A$对应的元素记为$f(a)$，并称为 **f 在 a 的值**（Value of f at a）或 **a 在 f 下的象**（image of a under f）。A称为f的**定义域**（domain），B称为f的**协域**（co-domain）。对于每一个函数$f: A \to B$对应着$A \times B$中的一个关系如下

$$\{\langle a, f(a)\rangle: a \in A\},$$

我们称这个集为f的**图象**（graph）。象的全体，记为$f[A]$，称为f的**值域**（range），即$f[A] = \{f(a): a \in A\}$。

设已给两个函数$f: A \to B$与$g: A \to B$，若对于每个$a \in A$恒有$f(a) = g(a)$，则称它们**相等**（equal），并记为$f = g$。这也就是说

$$f = g \quad 当且仅当它们有相同的图象。$$

因此，我们以后对于函数与它的图象不加以区别。

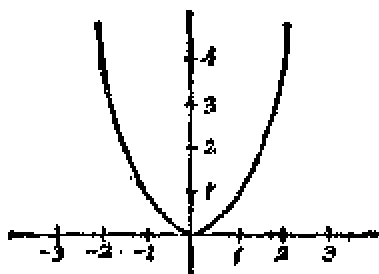
$A\times B$ 的一个子集 f，亦即由 A 到 B 的一个关系 f，是一个函数的充要条件是它具有以下性质：

[F] 对于每个 $a\in A$，在 f 中恰好有一个有序偶 $\langle a, b\rangle$，它的第一个坐标就是 a。

$f=g$ 的否定命题记为 $f\neq g$，其含义为：$\exists a\in A$ 使 $f(a)\neq g(a)$。

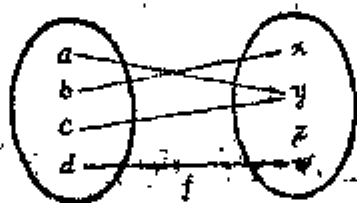
例 1.1 设 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是这样的函数，它对于每个实数指定其平方与之对应，即对每个 $x\in\mathbf{R}$ 指定 $f(x)=x^2$。这几 f 是一个**实值函数** (realued-valued function)，其图象 $\{\langle x, x^2\rangle: x\in\mathbf{R}\}$ 如图所示，f 的值域是非负实数集，

即
$$f[\mathbf{R}]=\{x: x\in\mathbf{R}, x\geqslant 0\}。$$



例 1.2 设 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{x, y, z, w\}$，则图定义了一个由 A 到 B 内的一个函数。这里的 $f[A]=\{x, y, w\}$，f 的图象是下面的关系

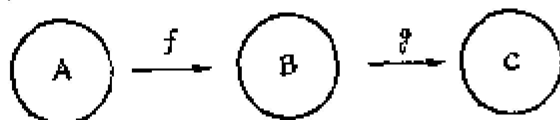
$$\{\langle a, y\rangle, \langle b, x\rangle, \langle c, y\rangle, \langle d, w\rangle\}。$$



例 1.3 一个函数 f: $A\to B$ 称为一个**常值函数** (a constant function)，若有 $b_0\in B$ 使对任何 $a\in A$，都有 $f(a)=b_0$ 成立的话。因此，任何常值函数的值域 $f[A]$ 都是一个

单元素集：$f[A]=\{b_0\}$。

现在考察两个函数 f：$A\to B$ 与 g：$B\to C$，图示如下。



这个由 A 到 C 的函数，它把元素 $a\in A$ 映照为 C 的元素 $g(f(a))$。称为 f 与 g 的**复合**（composition）或称为 f 与 g 的**积**（product），记为 $g\circ f$。因此，按定义有

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))。$$

提醒一点：若把 $f\subset A\times B$ 与 $g\subset B\times C$ 看作两个关系，则我们在第一章中就有过积 $g\cdot f$ 的定义。但是，这两种积在下述的意义下是一致的，即：当 f 与 g 是函数时，则 $g\cdot f$ 也是一个函数，而且有 $g\cdot f=g\circ f$。

设 f：$X\to Y$，且 $A\subset X$，则所谓 f 在 A 上的**收缩**（restriction），记为 $f|A$，是指一个由 A 到 Y 内的函数，其定义如下：对任何 $a\in A$ 有

$$f|A(a)\equiv f(a),$$

它的等价说法是 $f|A=f\cap(A\times Y)$。

另一方面，设 $X\subset X^*$，而 f：$X\to Y$ 是某个函数 g：$X^*\to Y$ 的一个收缩，则 g 称为 f 的一个**扩张**（extension）。

1—1 函数、到上函数、逆函数与恒等函数（One—one, onto, inverse and identity function）

一个函数 f：$A\to B$ 称为是**一对一的**（one to one or one-

one or 1—1)，是指A中不同元素的象也不同，即

$$f(a)=f(a')\Longrightarrow a=a'。$$

一个函数 f: $A\to B$ 称为**是到上的**(onto)，是指每个 $b\in B$ 都是某个 $a\in A$ 的象，即

$$b\in B\Longrightarrow \exists a\in A 使 f(a)=b。$$

因此，若f是到上的，则 $f[A]=B$。

一般说，一个函数 $f\subset A\times B$ 的逆关系 f^{-1} 可以不是一个函数。但若f既是 1－1 又是到上的，则 f^{-1} 是一个由B到A的函数，这个函数称为f的**逆函数**(inverse function)。

对角线关系 $\triangle_A\subset A\times A$ 是一个函数，这个函数称为A上的**恒等函数**(identity function)，也记为 1_A 或 1。在这里，对于每个 $a\in A$ 有 $1_A(a)=a$。显然，若 f: $A\to B$，则

$$1_B\circ f=f=f\circ 1_A。$$

此外，若f是 1－1 与到上，从而必有逆函数 f^{-1} 时，则有

$$f^{-1}\circ f=1_A \quad 与 \quad f\circ f^{-1}=1_B。$$

这命题的逆命题也是成立的。

命题 2.1 若 f: $A\to B$ 与 g: $B\to A$ 满足

$$g\circ f=1_A \quad 与 \quad f\circ g=1_B,$$

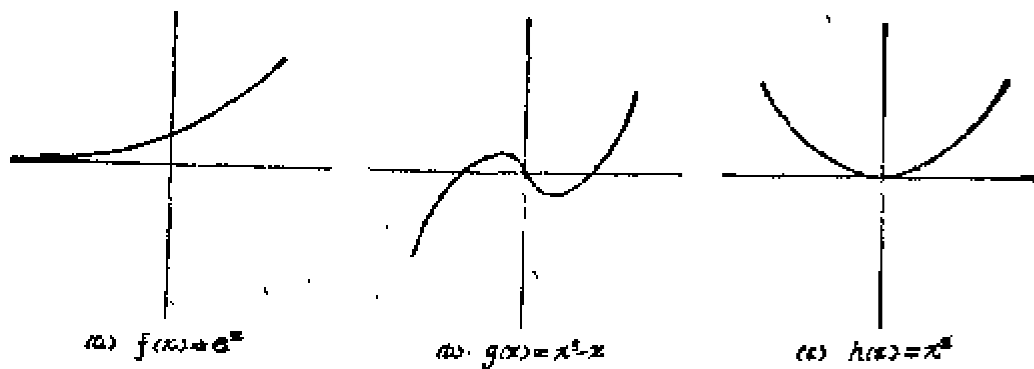
则 f^{-1}: $B\to A$ 存在，并且 $g=f^{-1}$。

例 2.1 设 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 及 h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义如下：

$$f(x)=e^x, \quad g(x)=x^3-x, \quad h(x)=x^2。$$

则函数f是1—1的，其图象如图(a)所示。从几何上看，1—1表示每条水平直线至多含有f上的一个点。函数g是到上的，其图象如图(b)所示。从几何上看，到上表示每条

水平直线至少含有 g 上的一个点。函数 h 的图象如图 (c) 所示。这个函数既非 1—1，也非到上。因为 $h(2)=h(-2)=4$，而且 $h[\mathbf{R}]$ 是 $\mathbf{R}$ 的真子集，例如 $-16\notin h[\mathbf{R}]$。



(a) $f(x)=e^x$ (b) $g(x)=x^3-x$ (c) $h(x)=x^2$

附标集，卡氏积（Indexed sets, Cartesian products）

一个**附标集组**（indexed class of sets），记为

$$\{A_i: i\in I\} \text{ 或 } \{A_i\}_{i\in I} \text{ 或简记为 } \{A_i\}。$$

它对每个 $i\in I$，指定一个集 A_i 来与之对应。就是说，它是由 I 到一个集组的函数。集 I 称为**指标集**（index set）；那些集 A_i 称为**附标集**（indexed sets）；每个 $i\in I$ 称为一个**指标**（an index）。当指标集 I 是正整数时，附标集组 $\{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ 称为一个**集列**（a sequence of sets）。

例 3.1 对每个正整数 $n\in\mathbf{N}$，令

$$D_n=\{x: x\in\mathbf{N}, x \text{ 是 } n \text{ 的倍数}\}$$

则

$$D_1=\{1, 2, 3, \cdots\}, D_2=\{2, 4, 6, \cdots\},$$
$$D_3=\{3, 6, 9, \cdots\}, \cdots。$$

附标集组 $\mathscr{A}=\{A_i: i\in I\}$ 的**卡氏积**（cartesian product）记为

$$\Pi\{A_i: i\in I\} \text{ 或 } \prod_{i\in I} A_i \text{ 或简记为 } \prod_i A_i。$$

它表示所有那样的函数 $p: I \to \bigcup_i A_i$ 所构成的集，这些函数满足：$p(i)=a_i \in A_i$ 的要求。卡氏积的一个元素记为

$$p=\langle a_i: i \in I\rangle。$$

对于每个 $i_0 \in I$，存在着一个由积集 $\prod_i A_i$ 到第 i_0 个坐标集 A_{i_0} (coordinate set)的函数 $\prod_{i_0}$，叫做第 i_0 个投影函数(the i_0th projection function)。这个函数定义如下：

$$\prod_{i_0}(\langle a_i: i \in I\rangle)=a_{i_0}。$$

例 3.2 我们知道 $\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 由一切三实数组 $p=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ 所构成。现在令 R_1, R_2, R_3 均为$\mathbf{R}$的复制品(即均为 $\mathbf{R}$)，则 p 可看作为 $I=\{1, 2, 3\}$ 上的一个函数，它使 $p(1)=a_1 \in R_1$, $p(2)=a_2 \in R_2$, $p(3)=a_3 \in R_3$。换句话说

$$\mathbf{R}^3=\prod\{R_i: i \in I, R_i=\mathbf{R}\}。$$

集运算的一般化(Generalized operations)

两个集的并及交的概念可以推广到宇宙集U的任何子集组 $\mathscr{A}$ 上去。集组 $\mathscr{A}$ 中所有的集的**并**(union)，记为 $\bigcup\{A: A \in \mathscr{A}\}$，是指所有那样的元素所构成的集，这些元素的每一个至少是$\mathscr{A}$中某个集的元素。即：

$$\bigcup\{A: A \in \mathscr{A}\}=\{x: x \in U, \exists A \in \mathscr{A} \text{ s.t. } x \in A\}。$$

集组$\mathscr{A}$中所有的集的**交**(intersection)，记为 $\bigcap\{A: A \in \mathscr{A}\}$，是指所有那样的元素所构成的集，这些元素属于 $\mathscr{A}$ 中每一个集。即：

$$\bigcap\{A: A \in \mathscr{A}\}=\{x: x \in U, x \in A \text{对每个 } A \in \mathscr{A} \text{ 都成立}\}$$

对于 U 的任何附标子集组$\mathscr{A}=\{A_i: i \in I\}$，$\mathscr{A}$中集之并记为

$$\bigcup\{A_i: i\in I\} \text{ 或 } \bigcup_{i\in I} A_i \text{ 或 } \bigcup_i A_i,$$

$\mathscr{A}$中集之交记为

$$\bigcap\{A_i: i\in I\} \text{ 或 } \bigcap_{i\in I} A_i \text{ 或 } \bigcap_i A_i。$$

对于U的一个子集列$\{A_1, A_2, \cdots\}$，我们也用下面的写法来记其并与交：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots,$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots。$$

例 4.1 对每个正整数$n\in \mathbf{N}$，令$D_n=\{x: x\in \mathbf{N}, x$是$n$的倍数$\}$（见例 3.1）。则

$$\bigcup\{D_i: i\geqslant 10\}=\{10, 11, 12, \cdots\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i=\varnothing。$$

例 4.2 令$I=[0, 1]$。对每个$i\in I$，令$A_i=[0, i]$，则

$$\bigcup_i A_i=[0, 1]; \quad \bigcap_i A_i=\{0\}。$$

对于一般化的集运算来说，分配律和 De Morgan 律也成立。

定理 2.2 对于任何集组$\mathscr{A}=\{A_i\}$及任何集B，有

(i) $B\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(B\cup A_i)$，

(ii) $B\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(B\cap A_i)$。

定理 2.3 设$\mathscr{A}=\{A_i\}$为U的一个子集组，则有

(i) $(\bigcup_i A_i)^c=\bigcap_i A_i^c$，

(ii) $(\bigcap_i A_i)^c=\bigcup_i A_i^c$。

下面的定理是常用的。

定理 2.4 设已给集 A。又设对每个 $p\in A$ 令 Gp 表示 A 的一个子集使得 $p\in Gp\subset A$，则

$$A=\bigcup\{Gp:\ p\in A\}。$$

注意 对于由宇宙集 U 的子集构成的空组 $\varnothing$，为方便起见，引入以下定义：

$$\bigcup\{A:\ A\in\varnothing\}=\varnothing,$$
$$\bigcap\{A:\ A\in\varnothing\}=U。$$

由此定义可得：

$$\bigcup\{A_i:\ i\in\varnothing\}=\varnothing,$$
$$\bigcap\{A_i:\ i\in\varnothing\}=U。$$

相应集函数（Associated set functions）

设已给 $f:\ X\to Y$，则 X 的任何子集 A 的**象**(image) $f[A]$ 是指由 A 中所有点的象所构成的集；而 Y 的子集 B 的**逆象**(inverse image) $f^{-1}[B]$ 是指 X 中那样的点所构成的集，这些点的象落在 B 中，就是说：

$$f[A]=\{f(x):\ x\in A\},$$
$$f^{-1}[B]=\{x:\ x\in X,\ f(x)\in B\}。$$

例 5.1 设 $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义如下：$f(x)=x^2$，则

$$f[\{1,3,4,7\}]=\{1,9,16,49\}$$
$$f[(1,2)]=(1,4),$$

又

$$f^{-1}[\{4,9\}]=\{-3,-2,2,3\}$$
$$f^{-1}[(1,4)]=(1,2)\cup(-2,-1)。$$

由以上所述可见，一个函数 $f:\ X\to Y$ 产生了一个由 X 的势集 $\mathscr{P}(X)$ 到 Y 的势集 $\mathscr{P}(Y)$ 内的函数，这个函数也用 f 来表示；同时 $f:X\to Y$ 也产生了一个由 $\mathscr{P}(Y)$ 到 $\mathscr{P}(X)$ 的函

数 f^{-1}。这两个产生出来的函数把集组映照到集组，所以称它们为**集函数**(set function)。

注意：一般地，集函数 f^{-1} 不是集函数 f 的逆。例如对于例 5.1 的函数 f，有

$$f^{-1}\circ f[(1, 2)]=f^{-1}[(1, 4)]=(1, 2)\cup(-2, -1)。$$

还要注意，在一个函数和它的相应集函数（译注：即指由函数所产生的两个集函数）中，使用了不同的括号，用来表示它们的区别。即：$f(a)$ 表示原始函数的值；$f[A]$ 与 $f^{-1}[B]$ 表示相应集函数的值。

相应集函数有以下一些重要性质：

定理 2.5 设 $f: X\to Y$。则对于 X 的任何子集 A 与 B 有：

(i) $f[A\cup B]=f[A]\cup f[B]$,

(ii) $f[A\cap B]\subset f[A]\cap f[B]$,

(iii) $f[A\setminus B]\supset f[A]\setminus f[B]$,

(iv) 若 $A\subset B$ 则 $f[A]\subset f[B]$。

一般地，对 X 的任何附标子集组 $\{A_i\}$ 有

(i′) $f[\cup_i A_i]=\cup_i f[A_i]$,

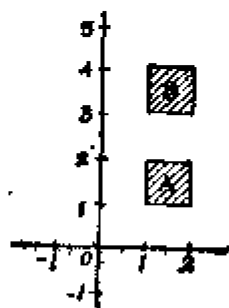
(ii′) $f[\cap_i A_i]\subset\cap_i f[A_i]$。

下面的例子说明(ii)与(iii)中的包含关系一般地不能改为相等关系。

例 5.2 考察平面 $\mathbf{R}^2$ 的子集

$A=[1, 2]\times[1, 2]$ 与 $B=[1, 2]\times[3, 4]$

以及在 x 轴上的投影 $\pi: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$。



由于 $\pi[A]=[1, 2]$, $\pi[B]=[1, 2]$ 及因 $A\cap B=\varnothing$ 而得的 $\pi[A\cap B]=\varnothing$，可知：

$$\pi[A]\cap\pi[B]=[1, 2]\neq\pi[A\cap B]=\varnothing,$$

此外因 $A\setminus B=A$，故

$$\pi[A\setminus B]=[1,2]\neq\varnothing=\pi[A]\setminus\pi[B]。$$

另一方面，逆集函数 f^{-1} 的性态比较好，在和上面相应的两种情况下，等号是成立的，亦即有下面的定理。

定理 2.6 设 $f: X\to Y$，则对于 Y 的任何子集 A 与 B，有：

(i) $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$，

(ii) $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$，

(iii) $f^{-1}[A\setminus B]=f^{-1}[A]\setminus f^{-1}[B]$，

(iv) 若 $A\subset B$ 则 $f^{-1}[A]\subset f^{-1}[B]$。

一般地，对于 Y 的任何附标子集组 $\{A_i\}$，有

(i′) $f^{-1}[\bigcup_i A_i]=\bigcup_i f^{-1}[A_i]$，

(ii′) $f^{-1}[\bigcap_i A_i]=\bigcap_i f^{-1}[A_i]$。

因为 $f^{-1}[Y]=X$，故作为 (iii) 的特殊情况，有下面的推论：

推论 2.7 设 $f: X\to Y$，又设 $A\subset Y$，则

$$f^{-1}[A^c]=(f^{-1}[A])^c。$$

下面的定理说明了两个相应集函数之间的一种重要关系。

定理 2.8 设 $f: X\to Y$，又设 $A\subset X$，$B\subset Y$，则

(i) $A\subset f^{-1}\circ f[A]$，

(ii) $B\supset f\circ f^{-1}[B]$。*

前面已经说明过，(i)中的包含关系通常不能改为相等关系。

---

*译注：原文为 $B=f\circ f^{-1}[B]$，但是当 B 是 f 的值域的一个真子集时，这个等式是不成立的。

实值函数的代数(Algebra of real—valued functions)

设$\mathscr{T}(X, \mathbf{R})$表示所有的定义在集$X$上的实值函数所构成的集。$\mathbf{R}$中的许多运算都可够植到$\mathscr{T}(X, \mathbf{R})$上去。

令$f: X\to\mathbf{R}$, $g: X\to\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{R}$, 则引入以下定义:

$(f+g): X\to\mathbf{R}$ 由 $(f+g)(x)\equiv f(x)+g(x)$ 定义,

$(k\cdot f): X\to\mathbf{R}$ 由 $(k\cdot f)(x)\equiv k(f(x))$ 定义,

$(|f|): X\to\mathbf{R}$ 由 $(|f|)(x)\equiv|f(x)|$ 定义,

$(fg): X\to\mathbf{R}$ 由 $(fg)(x)\equiv f(x)g(x)$ 定义。

同时为方便起见,我们把实数$k\in\mathbf{R}$与常值函数:

$$f(x)=k \text{ 对任何 } x\in\mathbf{R}$$

看成同一个东西。则$(f+k): X\to\mathbf{R}$由下式定义

$$(f+k)(x)\equiv f(x)+k。$$

注意:$(fg): X\to\mathbf{R}$并不是以前讨论过的f与g的复合。

例 6.1 考察定义域为$X=\{a, b\}$的函数

$$f=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle\} \text{ 与 } g=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, -1\rangle\},$$

则 $(3f-2g)(a)\equiv 3f(a)-2g(a)\equiv 3(1)-2(2)=-1$

$(3f-2g)(b)\equiv 3f(b)-2g(b)=3(3)-2(-1)=11$,

就是说

$$3f-2g=\{\langle a, -1\rangle, \langle b, 11\rangle\}。$$

还有,因为$|g|(x)\equiv|g(x)|$ 及 $(g+3)(x)\equiv g(x)+3$,

所以 $|g|=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$

$g+3=\{\langle a, 5\rangle, \langle b, 2\rangle\}$。

对于实值函数集$\mathscr{T}(X, \mathbf{R})$赋予以上运算以后,它有各

种重要性质，下面的定理指出其中的一部份。

定理2.9 定义在非空集 X 上的实值函数集 $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$，连同上面所定义的运算，满足**实线性向量空间**（real linear vector space）的公理。这些公理罗列如下：

[V_1] 函数 f 与 g 的加法运算满足：

(1) $(f+g)+h=f+(g+h)$,

(2) $f+g=g+f$,

(3) $\exists 0\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$，即：有 0：$X\to\mathbf{R}$ 使 $f+0=f$,

(4) 对每个 $f\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$，$\exists -f\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$，即：有 $-f$：$X\to\mathbf{R}$ 使 $f+(-f)=0$。

[V_2] 用一个实数 k 乘一个函数 f 的"数乘运算" $k\cdot f$ 满足：

(1) $k\cdot(k'\cdot f)=(kk')\cdot f$,

(2) $1\cdot f=f$。

[V_3] 加法运算与数乘运算满足：

(1) $k\cdot(f+g)=k\cdot f+k\cdot g$,

(2) $(k+k')\cdot f=k\cdot f+k'\cdot f$。

例6.2 设 $X=\{1, 2, \cdots, m\}$，则每个函数 $f\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 可以写成为一个有序 m 数组 $\langle f(1), \cdots, f(m)\rangle$。此外，

若 $\quad f=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle$ 及 $g=\langle b_1, \cdots, b_m\rangle$,

则 $\quad f+g=\langle a_1+b_1, \cdots, a_m+b_m\rangle$,

而且对任何 $k\in\mathbf{R}$，有

$$k\cdot f=\langle ka_1, \cdots, ka_m\rangle。$$

这时的实线性（向量）空间称为**m维欧氏空间**（m-dimensional Euclidean space）。

例6.3 一个函数 $f\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 称为**有界的**（bounded）是指：

$\exists M\in\mathbf{R}$ s.t. $|f(x)|\leqslant M$ 对任何 $x\in X$ 成立。

令 $\beta(X, \mathbf{R})$ 表示 $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 中所有有界函数所构成的集。则 $\beta(X, \mathbf{R})$ 具有下列性质：

(i) 若 $f, g\in\beta(X, \mathbf{R})$，则 $f+g\in\beta(X, \mathbf{R})$，

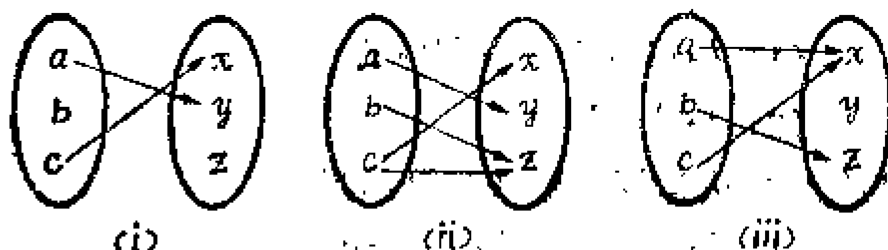
(ii) 若 $f\in\beta(X, \mathbf{R})$ 及 $k\in\mathbf{R}$，则 $k\cdot f\in\beta(X, \mathbf{R})$。

任何满足(i)与(ii)的 $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 的子集，称为 $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 的一个(**线性**)**子空间**((linear)subspace)。

习 题 解 答

函数

1．下列各图是否定义一个由 $A=\{a, b, c\}$ 到 $B=\{x, y, z\}$ 的函数？



解：(i) 不是。因对于 $b\in A$，B 中没有元素与之对应。

(ii) 不是。因对于 $c\in A$，B 中有两个元素 x 和 z 与之对应。

(iii) 是的。

2．设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$，下列各关系是不是一个由 X 到 X 的函数？

(i) $f=\{\langle 2, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$，

(ii) $g=\{\langle 3, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$，

(iii) $h=\{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$。

解：我们知道 $X\times X$ 的一个子集 f 是一个函数 $f: X\to X$

的充要条件是：每个$a\in X$，恰好只在f中的一个有序偶内作为第一个坐标出现。

(i) 不是。因f中有两个不同的有序偶$\langle 2, 3\rangle$和$\langle 2, 1\rangle$都有相同的第一个坐标。

(ii) 不是。因元素$2\in X$没有成为g中任何有序偶的第一个坐标。

(iii) 是的。虽然$2\in X$在h中都是两个有序偶的第一个坐标，但这两个有序偶是相等的。

3．考察下列两个由$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$到X的函数

$f=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 5, 2\rangle\}$

$g=\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$，

(i) 确定f和g的值域，

(ii) 求复合函数$g\circ f$与$f\circ g$。

解：(i) 我们知道函数的值域是象值的集，即所有有序偶的第二个坐标的集。因此

f的值域$=\{3, 5, 1, 2\}$，

g的值域$=\{4, 1, 2, 3\}$。

(ii) 利用复合函数定义并计算，得：

$(g\circ f)(1)\equiv g(f(1))=g(3)=1$，

$(f\circ g)(1)\equiv f(g(1))=f(4)=1$，

$(g\circ f)(2)\equiv g(f(2))=g(5)=3$，

$(f\circ g)(2)\equiv f(g(2))=f(1)=3$，

$(g\circ f)(3)\equiv g(f(3))=g(3)=1$，

$(f\circ g)(3)\equiv f(g(3))=f(1)=3$，

$(g\circ f)(4)\equiv g(f(4))=g(1)=4$，

$(f\circ g)(4)\equiv f(g(4))=f(2)=5$，

$$(g\circ f)(5)\equiv g(f(5))=g(2)=1,$$
$$(f\circ g)(5)\equiv f(g(5))=f(3)=3。$$

换句话说

$$g\circ f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,1\rangle\},$$
$$f\circ g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,3\rangle\}。$$

注意 $$f\circ g\neq g\circ f。$$

4．设函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义如下：

$$f(x)=2x+1,\qquad g(x)=x^2-2,$$

求复合函数 $g\circ f$ 及 $f\circ g$ 的定义式。

解：计算 $g\circ f$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 如下：

$$(g\circ f)(x)\equiv g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2-2$$
$$=4x^2+4x-1。$$

注意用另一种写法

$$y=f(x)=2x+1,\qquad z=g(y)=y^2-2$$

也可算得相同的结果：只须从两个方程消去 y 便得：

$$z=y^2-2=(2x+1)^2-2=4x^2+4x-1。$$

现在计算 $f\circ g$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 如下：

$$(f\circ g)(x)\equiv f(g(x))=f(x^2-2)=2(x^2-2)+1$$
$$=2x^2-3。$$

5．求证：函数的复合运算满足结合律，即若 f：$A\to B$，g：$B\to C$，h：$C\to D$，则 $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$。

解：因为关于一般关系的复合运算，结合律已被证明，而函数是一种特殊类型的关系，其复合运算自然也满足结合律。

这也可以直接证明如下：

$$((h\circ g)\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))=h(g(f(a))),\ \forall a\in A;$$

$$(h\circ(g\circ f))(a)=h((g\circ f)(a))=h(g(f(a))),\ \forall a\in A。$$

因此，$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)。$$

1—1与到上函数

6．设 f：$A\to B$，g：$B\to C$，求证：

(i) 若 f 与 g 皆为到上，则 $g\circ f$：$A\to C$ 也是到上的。

(ii) 若 f 与 g 皆为1—1，则 $g\circ f$：$A\to C$ 也是1—1的。

解：(i) 设 $c\in C$。因 g 是到上的，故 $\exists b\in B$ s.t. $g(b)=c$。又因 f 也是到上的，故 $\exists a\in A$ s.t. $f(a)=b$。
这样就得到

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))=c,$$

即：$g\circ f$ 是到上的。

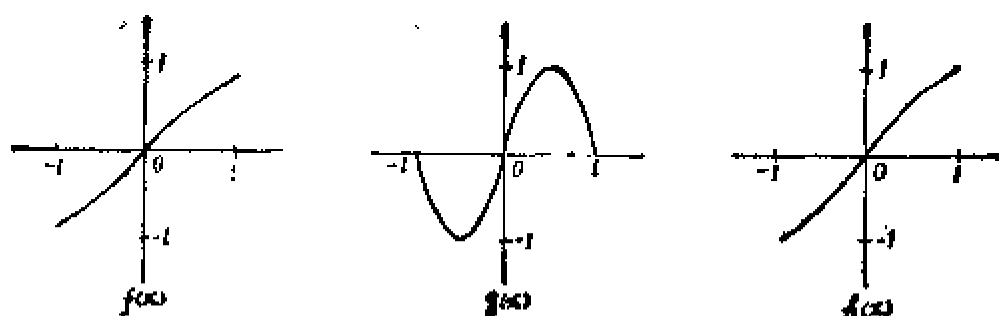
(ii) 假设 $(g\circ f)(a)=(g\circ f)(a')$，即 $g(f(a))=g(f(a'))$。因 g 是1—1的，故 $f(a)=f(a')$。又因 f 是1—1的，故 $a=a'$。从而 $g\circ f$ 也是1—1的。

7．设 $A=[-1,1]$，又设 f：$A\to A$，g：$A\to A$ 及 h：$A\to A$ 定义如下：

$$f(x)=\sin x,\quad g(x)=\sin\pi x,\quad h(x)=\sin\frac{\pi}{2}x,$$

问：它们是否(i) 1—1的，(ii) 到上的，(iii) 双射的（即既是1—1的又是到上的）？

解：这些函数的图形如下：



f 是 1—1 的；每条水平线至多含 f 上一点。但 f 不是到上的。例如：对所有的 $x\in A$，均有 $\sin x\neq 1$。

g 是到上的；每条水平线至少含 g 上一点。但 g 不是 1—1 的。例如：$g(-1)=g(0)=0$。

h 是双射的；每条水平线恰好含 h 上一点。

8．求证：设 f：$A\to B$ 及 g：$B\to C$ 都是 1—1 与到上的，则 $(g\circ f)^{-1}$：$C\to A$ 存在，且等于 $f^{-1}\circ g^{-1}$：$C\to A$。

解：利用命题 2.1，只须证明：

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=1_A \text{ 与 } (g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=1_B。$$

由函数复合运算的结合律，得

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)&=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ(g\circ f))\\&=f^{-1}\circ((g^{-1}\circ g)\circ f)\\&=f^{-1}\circ(1\circ f)=f^{-1}\circ f=1_A,\end{aligned}$$

其中利用了 $g^{-1}\circ g=1$ 及 $1\circ f=f=f\circ 1$ 的关系。同理得

$$\begin{aligned}(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})&=g(f\circ(f^{-1}\circ g^{-1}))=g\circ((f\circ f^{-1})\circ g^{-1})\\&=g\circ(1\circ g^{-1})=g\circ g^{-1}=1_B。\end{aligned}$$

9．在什么情况下，射影函数 π_{i_0}：$\Pi\{A_i$：$i\in I\}\to A_{i_0}$，$A_{i_0}\neq\varnothing$，是一个到上函数？

解：只要卡氏积 $\Pi\{A_i$：$i\in I\}$是非空的，即只要任何一个 A_i 都不是空集，则射影函数总是满射的。

附标集，一般化运算

10．设 $A_n=\{x: x$ 是 n 的倍数$\}$，其中 $n\in\mathbf{N}$ 是正整数。又设 $B_i=[i, i+1]$，其中 $i\in\mathbf{Z}$ 是整数。求：

(i) $A_3\cap A_5$；(ii) $\bigcup\{A_i: i\in p\}$，其中 p 表示素数集；

(iii) $B_3\cap B_4$；(iv) $\bigcup\{B_i: i\in\mathbf{Z}\}$；

(v) $(\bigcup\{B_i: i\geqslant 7\})\cap A_5$。

解：(i) 这集的元素既是 3 的倍数又是 5 的倍数，所以是 15 的倍数。因此 $A_3\cap A_5=A_{15}$。

(ii) 除 1 以外每个正整数至少是一个素数的倍数；因此 $\bigcup\{A_i: i\in p\}=\{2, 3, 4, \cdots\}=\mathbf{N}-\{1\}$。

(iii) $B_3\cap B_4=\{x: 3\leqslant x\leqslant 4, 4\leqslant x\leqslant 5\}=\{4\}$。

(iv) 因每个实数至少属于一个区间 $[i, i+1]$，故 $\bigcup\{B_i: i\in\mathbf{Z}\}=\mathbf{R}$ 是实数集。

(v) $(\bigcup\{B_i: i\geqslant 7\})\cap A_5$

$=\{x: x$ 是 5 的倍数，$x\geqslant 7\}$

$=A_5\setminus\{5\}=\{10, 15, 20, \cdots\}$。

11．设 $D_n=(0, 1/n)$，其中 $n\in\mathbf{N}$ 是正整数，求：

(i) $D_3\cup D_7$； (ii) $D_3\cap D_{20}$； (iii) $D_s\cup D_t$；

(iv) $D_s\cap D_t$； (v) $\bigcup\{D_i: i\in A\subset\mathbf{N}\}$；

(vi) $\bigcap\{D_i: i\in\mathbf{N}\}$。

解：(i) 因$(0, 1/7)\subset(0, 1/3)$，故 $D_3\cup D_7=D_3$。

(ii) 因$(0, 1/20)\subset(0, 1/3)$，故 $D_3\cap D_{20}=D_{20}$。

(iii) 设$m=\min\{s,t\}$，即m是 s 与 t 中较小的那个数；则或者是 $D_m=D_s\supset D_t$，或者是 $D_m=D_t\supset D_s$，而两者都归结为 $D_m=D_s\cup D_t$。

(iv) 设 $M=\max\{s, t\}$，即M是 s 与 t 中较大的那个数；则 $D_M=D_s\cap D_t$。

(v) 设 $a\in A$ 是A中最小的数，则

$$\bigcup\{D_i: i\in A\subset \mathbf{N}\}=D_a。$$

(vi) 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $\exists i\in\mathbf{N}$ s.t. $x\notin(0, 1/i)$。因此

$$\bigcap\{D_i: i\in\mathbf{N}\}=\varnothing。$$

12．求证：定理 2.2 (ii)（分配律）：

$$B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)。$$

解：$B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\{x: x\in B, x\in\bigcup_{i\in I}A_i\}$

$=\{x: x\in B, \exists i_0\in I \text{ s.t. } x\in A_{i_0}\}$

$=\{x: \exists i_0\in I \text{ s.t. } x\in B\cap A_{i_0}\}$

$=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$。

13．求证：设$\{A_i: i\in I\}$是一个附标集组，又设 $i_0\in I$，则

$$\bigcap_{i\in I}A_i\subset A_{i_0}\subset\bigcup_{i\in I}A_i。$$

解：设 $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$，则对每个 $i\in I$ 均有 $x\in A_i$，特别地，$x\in A_{i_0}$。因此 $\bigcap_{i\in I}A_i\subset A_{i_0}$。

再设 $y\in A_{i_0}$。因 $i_0\in I$，故 $y\in\bigcup_{i\in I}A_i$，因此 $A_{i_0}\subset\bigcup_{i\in I}A_i$。

14．求证定理 2.4：设已给集 A，又设对每个 $P\in A$，令 G_p 表示A的一个含 p 的子集：$p\in G_p\subset A$，则

$$A=\bigcup\{G_p: p\in A\}。$$

解：设 $x\in\bigcup\{G_p: p\in A\}$，则 $\exists\, p_0\in A$ t.s. $x\in G_{p_0}\subset A$，因此$x\in A$，故$\bigcup\{G_p: p\in A\}\subset A$。（换句话说，若每个$G_p$是$A$的子集，则$G_p$的并也是$A$的子集。）

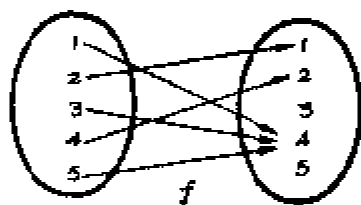
再设 $y\in A$，则 $y\in G_y$，因此 $y\in\bigcup\{G_p:\ p\in A\}$。故

$$A\subset\bigcup\{G_p:\ p\in A\}。$$

由以上两方面可知 $A=\bigcup\{G_p:\ p\in A\}$。

相应集函数

15. 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，又设 $f: A\to A$ 由下图定义：



求 (i) $f[\{1, 3, 5\}]$； (ii) $f^{-1}[\{2, 3, 4\}]$；
(iii) $f^{-1}[\{3, 5\}]$。

解：(i) $f[\{1, 3, 5\}]=\{f(1), f(3), f(5)\}=\{4\}$。

(ii) $f^{-1}[\{2, 3, 4\}]=\{4, 1, 3, 5\}$。

(iii) $f^{-1}[\{3, 5\}]=\varnothing$。因 A 中没有任何元素以 3 或 5 作为象。

16. 设函数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由 $f(x)=x^2$ 定义，求

(i) $f^{-1}[\{25\}]$； (ii) $f^{-1}[\{-9\}]$； (iii) $f^{-1}[\{x: x\leqslant 0\}]$；
(iv) $f^{-1}[\{x: 4\leqslant x\leqslant 25\}]$。

解：(i) $f^{-1}[\{25\}]=\{5, -5\}$，这是因为 $f(5)=25$，$f(-5)=25$，而且没有其他数的平方是 25。

(ii) $f^{-1}[\{-9\}]=\varnothing$。因为没有一个实数的平方是 -9。

(iii) $f^{-1}[\{x: x\leqslant 0\}]=\{0\}$。因为 $f(0)=0\leqslant 0$，而且其他任何实数的平方都大于 0。

(iv) $f^{-1}[\{x: 4\leqslant x\leqslant 25\}]$ 由满足 $4\leqslant x^2\leqslant 25$ 的数 x 所组

成。从而

$$f^{-1}[\{x: 4\leqslant x\leqslant 25\}]=[2, 5]\cup[-5, -2]。$$

17．求证：若 $f: X\to Y$ 是 1—1 的，则相应集函数 $f: \mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$ 也是 1—1 的。

解：若 $X=\varnothing$，则 $\mathscr{P}(X)=\{\varnothing\}$。因此由于 $\mathscr{P}(X)$ 是单元素集，它不可能含有两个不同的元素，使它们有相同的象，所以 $f: \mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$是 1—1 的。

若 $X\neq\varnothing$，则 $\mathscr{P}(X)$ 至少有两个元素。设 $A, B\in\mathscr{P}(X)$，但 $A\neq B$。则 $\exists p\in X$ s.t. $p\in A$, $p\notin B$（或$p\in B$, $p\notin A$），因此 $f(p)\in f[A]$，且因 f 是 1—1 的，故 $f(p)\notin f[B]$（或 $f(p)\in f[B]$ 而 $f(p)\notin f[A]$）。因此，$f[A]\neq f[B]$。由此可知相应集函数也是 1—1 的。

18．求证（定理 2.5(i) 与 (iii)）：

(a) $f[A\cup B]=f[A]\cup f[B]$,

(b) $f[A]\setminus f[B]\subset f[A\setminus B]$。

解：(a) 先证 $f[A\cup B]\subset[A]\cup[B]$

设 $y\in f[A\cup B]$，即 $\exists x\in A\cup B$ s.t. $f(x)=y$。则或者是 $x\in A$ 或者是 $x\in B$。但是，

由 $x\in A$ 可得 $f(x)=y\in f[A]$

由 $x\in B$ 可得 $f(x)=y\in f[B]$

因此在任何一种情况下都有：$y\in f[A]\cup f[B]$。

再证反向的包含关系，即 $f[A]\cup f[B]\subset f[A\cup B]$。

设 $y\in f[A]\cup f[B]$，则或者是 $y\in f[A]$ 或者是 $y\in f[B]$。但是

由 $y\in f[A]$ 可得：$\exists x\in A$ s.t. $f(x)=y$,

由 $y\in f[B]$ 可得：$\exists x\in B$ s.t. $f(x)=y$。

因此在任何一种情况下都有：$\exists x\in A\cup B$ s.t. $f(x)=y$，即 $y\in f[A\cup B]$。

(b) 设 $y\in f[A]\setminus f[B]$，则 $\exists x\in A$ s.t. $f(x)=y$，但 $y\notin f[B]=\{f(x): x\in B\}$。因此 $x\notin B$，亦即 $x\in A\setminus B$。从而 $y\in f[A\setminus B]$。

19．求证（定理2.6(ii)与(iii)）：

(a) $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$，

(b) $f^{-1}[A\setminus B]=f^{-1}[A]\setminus f^{-1}[B]$。

解：(a) 先证 $f^{-1}[A\cap B]\subset f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$。

设 $x\in f^{-1}[A\cap B]$，则 $f(x)\in A\cap B$，因此 $f(x)\in A$ 且 $f(x)\in B$，或者 $x\in f^{-1}[A]$ 且 $x\in f^{-1}[B]$。故 $x\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$。

为了证反向的包含关系，设 $x\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$，则 $f(x)\in A$ 且 $f(x)\in B$，即 $f(x)\in A\cap B$。因此 $x\in f^{-1}[A\cap B]$。

(b) 为了证 $f^{-1}[A\setminus B]\subset f^{-1}[A]\setminus f^{-1}[B]$，假设 $x\in f^{-1}[A\setminus B]$，则 $f(x)\in A\setminus B$，即 $f(x)\in A$ 且 $f(x)\notin B$。于是 $x\in f^{-1}[A]$ 但 $x\notin f^{-1}[B]$，即 $x\in f^{-1}[A]/f^{-1}[B]$。

为了证反向的包含关系。设 $x\in f^{-1}[A]\setminus f^{-1}[B]$，则 $f(x)\in A$ 但 $f(x)\notin B$，即 $f(x)\in A\setminus B$。因此 $x\in f^{-1}[A\setminus B]$。

实值函数的代数

20．设 $X=\{a, b, c\}$，又设 $f, g\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 如下：

$$f=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, -2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$$

$$g=\{\langle a, -2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$$

求 (i) $f+2g$，(ii) $fg-2f$，(iii) $f+4$，(iv) $|f|$，(v) f^2。

解：(i) 计算如下：

$$(f+2g)(a)\equiv f(a)+2g(a)=1-4=-3$$

$$(f+2g)(b)\equiv f(b)+2g(b)=-2+0=-2$$

$$(f+2g)(c)\equiv f(c)+2g(c)=3+2=5$$

换句话说，$f+2g=\{\langle a,\ -3\rangle,\langle b,\ -2\rangle,\langle c,\ 5\rangle\}$。

(ii) 同理

$$(fg-2f)(a)\equiv f(a)g(a)-2f(a)=(1)(-2)-2(1)=-4$$

$$(fg-2f)(b)\equiv f(b)g(b)-2f(b)=(-2)(0)-2(-2)=4$$

$$(fg-2f)(c)\equiv f(c)g(c)-2f(c)=(3)(1)-2(3)=-3$$

就是说，$fg-2f=\{\langle a,\ -4\rangle,\langle b,\ 4\rangle,\langle c,\ -3\rangle\}$。

(iii) 由定义 $(f+4)(x)=f(x)+4$，即在 f 的每个象值上加上 4，也就是在 f 的每个有序偶的第二个坐标上加上 4。因此，

$$f+4=\{\langle a,\ 5\rangle,\langle b,\ 2\rangle,\langle c,\ 7\rangle\}。$$

(iv) 因 $|f|(x)=|f(x)|$，将 f 的每个有序偶的第二个坐标用它的绝对值代替。于是，

$$|f|=\{\langle a,\ 1\rangle,\langle b,\ 2\rangle,\langle c,\ 3\rangle\}。$$

(v) 因 $f^2(x)=(ff)(x)\equiv f(x)f(x)=(f(x))^2$，将 f 的每个有序偶的第二个坐标用它的平方值代替。于是，

$$f^2=\{\langle a,\ 1\rangle,\langle b,\ 4\rangle,\langle c,\ 9\rangle\}。$$

21. 设 $\hat{0}\in\mathscr{F}(X,\ \mathbf{R})$ 定义如下：对于任何 x 有 $\hat{0}(x)=0$。求证：对任何 $f\in\mathscr{F}(X,\ \mathbf{R})$，有：

(i) $f+\hat{0}=f$.　　(ii) $f\hat{0}=\hat{0}$。

解：(i) $(f+\hat{0})(x)\equiv f(x)+\hat{0}(x)=f(x)+0=f(x)$ 对任何 $x\in X$ 成立；故 $f+\hat{0}=f$。

注意：$\hat{0}$ 满足定理 2.9 的公理[$\mathbf{V}_1$]中关于 0 的条件。

(ii) $(f\hat{0})(x)=f(x)\hat{0}(x)=f(x)\cdot(0)=0=\hat{0}(x)$ 对于任何 $x\in X$ 成立；故 $f\hat{0}=\hat{0}$。

22．求证：$\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 满足定理2.9的公理[$\mathbf{V}_3$]，即：若 $f, g\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 及 $k, k'\in\mathbf{R}$，则：

(i) $k\cdot(f+g)=k\cdot f+k\cdot g$，(ii) $(k+k')\cdot f=k\cdot f+k'\cdot f$。

解：(i)
$$\begin{aligned}[k\cdot(f+g)](x)&=k[(f+g)(x)]\\&=k[f(x)+g(x)]\\&=k(f(x))+k(g(x))\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(k\cdot f+k\cdot g)(x)&=(k\cdot f)(x)+(k\cdot g)(x)\\&=k(f(x))+k(g(x))\end{aligned}$$
对于任何 $x\in X$ 成立，故 $k\cdot(f+g)=k\cdot f+k\cdot g$。

注意这里用到：k，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是实数且满足分配律。

(ii)
$$((k+k')\cdot f)(x)=(k+k')f(x)=k(f(x))+k'(f(x))$$
$$\begin{aligned}(k\cdot f+k'\cdot f)(x)&=(k\cdot f)(x)+(k'\cdot f)(x)\\&=k(f(x))+k'(f(x))\end{aligned}$$
对于任何 $x\in X$ 成立，故 $(k+k')\cdot f=k\cdot f+k'\cdot f$。

补 充 习 题

函数

23．设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义如下：
$$f(x)=\begin{cases}2x-5 & \text{若}\ x>2\\ x^2-2|x| & \text{若}\ x\leqslant 2,\end{cases}\qquad g(x)=3x+1。$$
求 (i) $f(-2)$，(ii) $g(-3)$，(iii) $f(4)$，

(iv) $(g\circ f)(1)$，(v) $(f\circ g)(2)$，(vi) $(f\circ f)(3)$。

24．设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义如下：

$f(x)=x^2+3x+1,\qquad g(x)=2x-3$。

求下列复合函数的公式：(i) $f\circ g$，(ii) $g\circ f$，(iii) $f\circ f$。

25．设 k：$X\to X$ 是一个常值函数，求证对任何函数 f：$X\to X$，$k\circ f=k$，$f\circ k$ 呢？

26．考虑函数 $f(x)=x$，其中 $x\in\mathbf{R}$，$x\geqslant 0$。指出下列函数是否是 f 的一个扩张。

(i) $g_1(x)=|x|$，对所有 $x\in\mathbf{R}$；(ii) $g_2(x)=x$，其中 $x\in[-1,1]$；(iii) $g_3(x)=(x+|x|)/2$，对所有 $x\in\mathbf{R}$；(iv) $1_{\mathbf{R}}$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。

27．设 $A\subset X$，又设 f：$X\to Y$。从 A 到 X 的包含函数 j，用 j：$A\subset X$ 表示，定义为 $j(a)=a$ 对所有 $a\in A$。

求证 f 在 A 上的收缩 $f|_A$ 等于复合函数 $f\circ j$ 即 $f|_A=f\circ j$。

1—1 函数、到上函数、逆函数和恒等函数

28．求证：对任何函数 f：$A\to B$，$f\circ 1_A=f=1_B\circ f$。

29．求证：若 f：$A\to B$ 既是 1—1 的又是到上的，则 $f^{-1}\circ f=1_A$ 且 $f\circ f^{-1}=1_B$。

30．求证：若 f：$A\to B$ 与 g：$B\to A$ 满足 $g\circ f=1_A$ 则 f 为 1—1 函数，而 g 为到上函数。

31．求证命题 2.1：设 f：$A\to B$ 与 g：$B\to A$ 满足 $g\circ f=1_A$ 与 $f\circ g=1_B$，则 f^{-1}：$B\to A$ 存在且 $g=f^{-1}$。

32．在什么条件下，射影函数 π_{i_0}：$\Pi\{A_i;\ i\in I\}\to A_{i_0}$ 是 1—1 的？

33．设 f：$(-1,1)\to\mathbf{R}$ 由 $f(x)=x/(1-|x|)$ 所定义，求证 f 既是 1—1 的又是到上的。

34．设 R 是非空集 A 中的一个等价关系。从 A 到商集

A/R 的自然函数 η 定义为 $\eta(a)=[a]$，$[a]$ 为 a 的等价类。求证 η 是到上的函数。

35．设 f：$A\to B$。A 中的关系 R 定义为：aRa' iff $f(a)=f(a')$，是一个等价关系。设 $\hat{f}$ 表示从商集 A/R 到 f 的值域 $f[A]$ 的一个对应，$\hat{f}$：$[a]\to f(a)$。

(i) 求证 $\hat{f}$：$A/R\to f[A]$ 是一个既是到上又是 1—1 的函数。

(ii) 设 η：$A\to A/R$ 是自然函数与 j：$f[A]\subset B$ 是包含函数，求证 $f=j\circ\hat{f}\circ\eta$。 $A\xrightarrow{\eta}A/R\xrightarrow{\hat{f}}f[A]\xrightarrow{j}B$。

附标集与一般化运算

36．设 $A_n=\{x:\ x$ 是 n 的倍数$\}=\{n,\ 2n,\ 3n,\ \cdots\}$，其中 $n\in\mathbf{N}$，$\mathbf{N}$ 为正整数集。求：(i) $A_2\cap A_7$；(ii) $A_6\cap A_8$；(iii) $A_3\cup A_{12}$；(iv) $A_3\cap A_{12}$；(v) $A_s\cup A_{st}$，其中 $s,\ t\in\mathbf{N}$；(vi) $A_s\cap A_{st}$，其中 $s,\ t\in\mathbf{N}$；(vii) 求证：若 $J\subset\mathbf{N}$ 是无限集，则 $\bigcap\{A_i:\ i\in J\}=\varnothing$。

37．设 $B_i=(i,\ i+1]$ 为一个左开右闭区间，其中 $i\in\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$ 为整数集，求：(i) $B_4\cup B_5$，(ii) $B_6\cap B_7$，(iii) $\bigcup_{i=4}^{20}B_i$，(iv) $B_s\cup B_{s+1}\cup B_{s+2}$，$s\in\mathbf{Z}$，(v) $\bigcup_{i=0}^{15}B_{s+i}$，(vi) $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}}B_{s+i}$。

38．设 $D_n=[0,\ 1/n]$，$S_n=(0,\ 1/n]$ 及 $T_n=[0,\ 1/n)$ 其中 $n\in\mathbf{N}$，$\mathbf{N}$ 为正整数集。求：(i) $\bigcap\{D_n:\ n\in\mathbf{N}\}$，(ii) $\bigcap\{S_n:\ n\in\mathbf{N}\}$，(iii) $\bigcap\{T_n:\ n\in\mathbf{N}\}$。

39．求证 De Morgan 律：(i) $(\bigcup_i A_i)^c=\bigcap_i A_i^c$，(ii) $(\bigcap_i A_i)^c=\bigcup_i A_i^c$。

40．设 $\mathscr{A}=\{A_i:\ i\in I\}$ 是集合的一个附标类，又设

$J\subset K\subset I$。求证：(i) $\bigcup\{A_i: i\in J\}\subset\bigcup\{A_i: i\in K\}$，(ii) $\bigcap\{A_i: i\in J\}\supset\bigcap\{A_i: i\in K\}$。

相应集函数

41．设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义为 $f(x)=x^2+1$，求：(i) $f[\{-1, 0, 1\}]$，(ii) $f^{-1}[\{10, 17\}]$，(iii) $f[(-2, 2)]$，(iv) $f^{-1}[(5, 10)]$，(v) $f[\mathbf{R}]$，(vi) $f^{-1}[\mathbf{R}]$。

42．求证：一个函数 f：$X\to Y$ 是1—1的，当且仅当 $f[A\cap B]=f[A]\cap f[B]$，对X的所有子集A与B成立。

43．求证：设 f：$X\to Y$，则对X的任何子集A与B，(a) $f[A\cap B]\subset f[A]\cap f[B]$，(b) $A\subset B$ 导致 $f[A]\subset f[B]$。

44．求证：设 f：$X\to Y$，则对 Y 的任何子集A与B，(a) $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$，(b) $A\subset B$ 导致 $f^{-1}[A]\subset f^{-1}[B]$。

45．求证定理2.8：设 f：$X\to Y$，又设 $A\subset X$，$B\subset Y$，则 (i) $A\subset f^{-1}\circ f[A]$，(ii) $B\supset f\circ f^{-1}[B]$。

46．求证：设 f：$X\to Y$ 是到上的，则相应集函数 f：$\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$ 也是到上的。

47．求证：一个函数 f：$X\to Y$ 既是1—1的又是到上的，当且仅当 $f[A^c]=(f[A])^c$ 对X的每一子集A成立。

48．求证：一个函数 f：$X\to Y$ 是1—1的，当且仅当 $A=f^{-1}\circ f[A]$ 对X的每一子集A成立。

实值函数的代数

49．设 $X=\{a, b, c\}$，又设 f 与 g 是X上的如下的实值函数：

$$f=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, -3\rangle, \langle c, -1\rangle\},$$
$$g=\{\langle a, -2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$$

求：(i) $3f$，(ii) $2f-5g$，(iii) fg，(iv) $|f|$，

(v) f^3，(vi) $|3f-fg|$。

50．设A是宇宙集U的任一子集，则下面定义的实值函数 χ_A：$U\to\mathbf{R}$

$$\chi_{A(x)}=\begin{cases}1 & 若\ x\in A\\ 0 & 若\ x\notin A\end{cases}$$

称为A的特征函数。求证：

(i) $\chi_{A\cap B}=\chi_A\chi_B$，　　(ii) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$，

(iii) $\chi_{A\setminus B}=\chi_A-\chi_{A\cap B}$。

51．求证：$\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$满足定理2.9中的公理[$\mathbf{V}_2$]；即若$f\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$与$k, k'\in\mathbf{R}$，则 (i) $k\cdot(k'\cdot f)=(kk')\cdot f$，(ii) $1\cdot f=f$。

52．对每一个$k\in\mathbf{R}$，设$\hat{k}\in\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$表示常值函数$\hat{k}(x)=k$对所有$x\in X$成立。

(i) 求证常值函数的组 (collection) $\mathscr{C}$，即$\mathscr{C}=\{\hat{k}: k\in\mathbf{R}\}$，是$\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$的一个线性子空间。

(ii) 设α：$\mathscr{C}\to\mathbf{R}$，由$\alpha(\hat{k})=k$所定义，求证α既是1—1的又是到上的，对任何$k, k'\in\mathbf{R}$，有

$$\alpha(\hat{k}+\hat{k}')=\alpha(\hat{k})+\alpha(\hat{k}').$$

补充习题答案

23．(i) 0，(ii) -8，(iii) 3，(iv) -2，(v) 9，

(vi) -1。

24. (i) $(f\circ g)(x)=4x^2-6x+1$, (ii) $(g\circ f)(x)=2x^2+6x-1$, (iii) $(f\circ f)(x)=x^4+6x^3+14x^2+15x+5$。

25. 函数 $f\circ k$ 是一个常值函数。

26. (i) 是, (ii) 不是, (iii) 是, (iv) 是。

32. A_i 为单元素集, 譬如说 $A_i=\{a_i\}$, 对 $i\neq i_0$。

36. (i) A_{14}, (ii) A_{24}, (iii) A_3, (iv) A_{12}, (v) A_s, (vi) A_{st}。

37. (i) $(4, 6]$, (ii) $\varnothing$, (iii) $(4, 21]$,
(iv) $(s, s+3]$, (v) $(s, s+16]$, (vi) R。

38. (i) $\{0\}$, (ii) $\varnothing$, (iii) $\{0\}$。

41. (i) $\{1, 2\}$, (ii) $\{3, -3, 4, -4\}$, (iii) $[1, 5)$[1], (iv) $(-3, -2)$, $(2, 3)$, (v) $\{x; x\geqslant 1\}$, (vi) $\mathbf{R}$。

49. (i) $3f=\{\langle a, 6\rangle, \langle b, -9\rangle, \langle c, -3\rangle\}$,
(ii) $2f-5g=\{\langle a, 14\rangle, \langle b, -6\rangle, \langle c, -7\rangle\}$,
(iii) $fg=\{\langle a, -4\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, -1\rangle\}$,
(iv) $|f|=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle\}$,
(v) $f^3=\{\langle a, 8\rangle, \langle b, -27\rangle, \langle c, -1\rangle\}$,
(vi) $|3f-fg|=\{\langle a, 10\rangle, \langle b, 9\rangle, \langle c, 2\rangle\}$。

---

[1] 译者注: 原文误为(1,5)。

第三章　势　与　序

等价集（Equivalent sets）

设已给两个集A与B。若有1—1与到上函数f: $A\to B$存在，则称集A**等价**(equivalent)于集B，并记为$A\sim B$。这时我们说：函数f在集A与集B之间建立了一个**一一对应关系**(one-to-one correspondence)。

一个集A若为空集或与集$\{1, 2, \cdots, n\}$（其中$n\in\mathbf{N}$是某个正整数）等价，则A称为**有限集**(finite set)；否则称为**无限集**（infinite set)。显然两个有限集等价的充要条件是它们含有相同个数的元素，所以对有限集来说，等价的含义相当于含有同样多个元素。

例1.1　设$\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$，$\mathbf{E}=\{2, 4, 6, \cdots\}$，则由$f(x)=2x$定义的函数$f$: $\mathbf{N}\to\mathbf{E}$是1—1与到上的。所以$\mathbf{N}$与$\mathbf{E}$等价。

例1.2　由$f(x)=x/(1-|x|)$定义的函数f: $(-1, 1)\to\mathbf{R}$是1—1与到上的，所以$(-1, 1)$等价于实数集$\mathbf{R}$。

注意：无限集可以等价于它自己的一个真子集。这个性质对任何无限集都成立。

命题3.1　在任何集组中由$A\sim B$定义的关系是一种等价关系。

可列集与可数集（Denumerable and countable sets）

设 **N** 表示正整数集$\{1, 2, 3, \cdots\}$。

一个集 X，若与 **N** 等价，则称为一个**可列集**(denumerable set)，并说它具有**基数**（cardinality）$\aleph_0$（读作阿列夫零（Aleph-null））。

有限集与可列集统称为**可数集**（countable set）。

例 2.1 一个无限序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

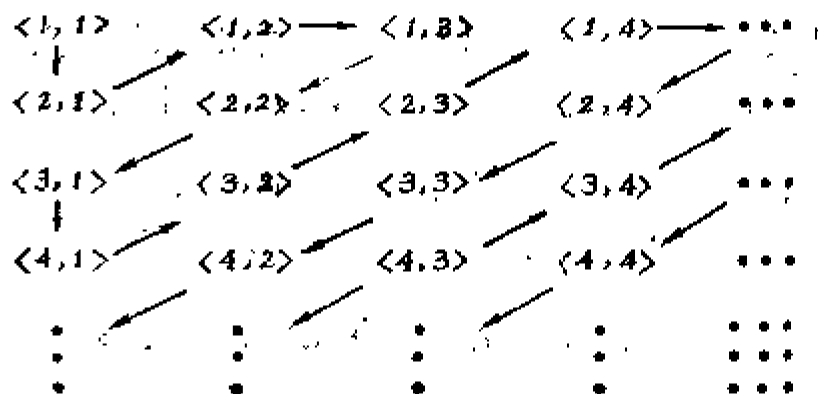
若它的项各不相同，它就是一个可列集。因为序列实质上就是以 **N** 为定义域的函数 $f(n)=a_n$。因此，当 a_n 两两不同时，此函数是 1—1 与到上的，亦即这序列是可列的。由此可知下列各集都是可列集：

$$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$$

$$\{1, -2, 3, -4, \cdots\}$$

$$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 4, 8\rangle, \langle 9, 27\rangle, \cdots, \langle n^2, n^3\rangle, \cdots\}$$

例 2.2 考察写在下面的积集 **N**×**N**：



我们可以按上图所示箭头的顺序把 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 写成具有两两不同的元素的无限序列如下：

$$\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \cdots。$$

由此可见，$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可列的。

例 2.3 设 $M=\{0,1,2,3,\cdots\}=\mathbf{N}\cup\{0\}$。我们知道每个正整数 $a\in\mathbf{N}$ 可用唯一的方式表达为

$$a=2^r(2s+1),$$

其中 $r, s\in M$。采用上式中的 r, s，由下式

$$f(a)=\langle r, s\rangle$$

定义的函数 $f: \mathbf{N}\to M\times M$ 是 1—1 与到上的，因此 $M\times M$ 是可列的。注意：$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是 $M\times M$ 的一个子集。

下列诸定理是关于可列集与可数集的。

定理 3.2 每个无限集都含一个可列子集。

定理 3.3 每个可数集的子集都是可数的。

引理 3.4 设 $\{A_1, A_2, \cdots\}$ 是由两两互斥的可列集所构成的可列组，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可列的。

定理 3.5 设 $\{A_i: i\in I\}$ 是可数集构成的可数组，即：I 是可数集，而对于每个 $i\in I$ 来说，A_i 是可数的。则 $\bigcup\{A_i: i\in I\}$ 也是可数的。

既非有限也非可列的集称为**不可列集**(non-denumerable)或**不可数集**(non-countable)。

连续统（Continuum）

不是任何无限集都可列；事实上，下面的定理给出了一个特殊的然而是极重要的例子。

定理 3.6 单位区间[0, 1]是不可列的。

和单位区间 [0, 1] 等价的集称为具有**连续统的势**(the power of the continuum),或称为**具有基数C**。(cardinality **C**)。

在习题解答中,我们将证明任何开的或闭的区间都具有基数 **C**。由例 1.2,开区间(−1, 1)等价于 **R**,因此有

命题 3.7 实数集 **R** 具有基数 **C**。

Schroeder—Bernstein 定理

若A等价于B的一个子集,则记为 $A \precsim B$,即

$$A \precsim B \text{ 当且仅当 } \exists B^* \subset B \text{ s.t. } A \sim B^*$$

若 $A \precsim B$ 但 $A \nsim B$(即A不等价于B),则亦记为 $A \prec B$。

例 3.1 因 **N** 是 **R** 的一个子集,故 $\mathbf{N} \precsim \mathbf{R}$。另一方面,由命题 3.7,**R** 是不可列的,即 $\mathbf{R} \nsim \mathbf{N}$。从而,$\mathbf{N} \prec \mathbf{R}$。

任给两个集A与B,则下列情况之一必然成立:

(i) $A \sim B$, (ii) $A \prec B$ 或 $B \prec A$,

(iii) $A \precsim B$ 同时 $B \precsim A$,

(iv) $A \not\precsim B$, $A \nsim B$, $B \not\precsim A$ 同时成立。

著名的 Schroeder-Bernstein 定理指出在 (iii) 情况下,A 实际上等价于 B。即:

定理 3.8 (Schroeder-Bernstein)

若 $A \precsim B$ 同时 $B \precsim A$,则 $A \sim B$。

这定理可改述为以下形式:

定理 3.9 若 $X \supset Y \supset X_1$,而 $X \sim X_1$,则 $X \sim Y$。

注意:前面所列的情况(iv)是不可能的,就是说下面的

定理是成立的。

定理 3.9 （三居一律）对于任何两个集 A 与 B，或 $A \prec B$ 或 $A \sim B$ 或 $B \prec A$，三者必居其一。

势（或基数）概念(Concept of cardinality)

若 A 等价于 B，即若 $A \sim B$，则称 A 与 B 有相同的**势** (cardinality)，或说有相同的**基数**（cardinal number）。我们用记号 $\#(A)$ 表示 A 的势（或基数）。这样就有：

$$\#(A) = \#(B) \text{ 当且仅当 } A \sim B。$$

另一方面，若 $A \prec B$，则称 A 的**势小于** B 的势，或说 B 的**势大于** A 的势。就是说

$$\#(A) < \#(B) \text{ 当且仅当 } A \prec B,$$

于是

$$\#(A) \leqslant \#(B) \text{ 当且仅当 } A \precsim B。$$

利用势（或基数）的概念，可以把 Schroeder-Bernstein 定理改述如下：

定理 3.8 若 $\#(A) \leqslant \#(B)$ 同时 $\#(B) \leqslant \#(A)$，则 $\#(A) = \#(B)$。

下列各集

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \cdots$$

的基数分别记为 0，1，2，3，…等等，它们称为**有限** (finite) 基数。$\mathbf{N}$ 与 $[0, 1]$ 的基数分别记为

$$\aleph_0 = \#(\mathbf{N}), \mathbf{C} = \#([0, 1])。$$

这样就可以写：

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots \aleph_0 < \mathbf{C}。$$

Cantor 定理与连续统假设

自然要问：除 $\aleph_0$ 与 $\mathbf{C}$ 外，是否还有其他的无限基数？答案是："有的"。下面的 Cantor 定理就说明这一点。这个定理指出，对于任何集，可以找到具有更大的势的集。

定理 3.10 (Cantor) 对于任何集 A，其势集 $\mathscr{P}(A)$ 比 A 具有更大的势。

下面的问题也是很自然的：有没有这样的集存在，它的势介于 $\aleph_0$ 与 $\mathbf{C}$ 之间？对这问题的答案，有着这样的猜测："不存在"。这就是所谓的"连续统"假设 (continuum hypothesis)：

连续统假设 满足不等式 $\aleph_0 < \#(A) < \mathbf{C}$ 的集 A 是不存在的。

在 1963 年证明了：连续统假设和我们的集论公理是互相独立的。就象关于平行线的欧氏第五公设和几何的其他公理是互相独立的情况相类似。

部分序集 (partially ordered sets)

集 A 中的一个关系 $\precsim$ 如果满足下列条件：对于任何 a, b, $c \in A$，有：

(i) $a \precsim a$,

(ii) $a \precsim b$ 同时 $b \precsim a$, 则 $a = b$,

(iii) $a \precsim b$ 同时 $b \precsim c$, 则 $a \precsim c$,

则称为 A 上的一个**部分序** (partial order) 或称为 A 上的一个**序** (order)。

集A连同这个部分序，即偶$(A, \precsim)$，称为一个**部分序集**(partially ordered set)。

我们知道满足(i)的关系称为自反的，满足(iii)的关系称为传递的。现在，我们把满足(ii)的关系称为**反称的**(antisymmetric)。这样，一个部分序就是一个自反的，反称的，传递的关系。

例 4.1 在任何集组中，集的包含关系是一个部分序，因为 (i) 对任何集A都有$A\subset A$；

(ii) 若 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$，则 $A=B$；

(iii) 若 $A\subset B$ 同时 $B\subset C$，则 $A\subset C$。

例 4.2 设A是任一个实数的集，则在A中由$x\leqslant y$所规定的关系是一个部分序。这个部分序称为A中的**自然序**(natural order)。

例 4.3 设$X=\{a, b, c, d, e\}$，则下图



在X中定义了一个部分序如下：$x\precsim y$当且仅当$x=y$。或者说是可以沿上图中的箭头从x走到y。

在一个部分序集中若$a\precsim b$，则称a**先于**(precedes)或**小于**(smaller than)b，而称b**后于**(follows)或**优于**(dominates)或**大于**(larger than)a。

又：若$a\precsim b$但$a\neq b$，则记作$a\prec b$。

设A为一部分序集，若每两个元素$a, b\in A$都有：或者$a\precsim b$或者$b\precsim a$，则称A为**全序集**((totally ordered set)或**线性序集**(linearly ordered set)。实数集$\mathbf{R}$具有由$x\leqslant y$所规定的自然序时，就是一个全序集。

例 4.4 设A与B皆为全序集，则积集$A\times B$可以赋予全序如下：

$$\langle a, b\rangle \prec \langle a', b'\rangle \text{ 若 } a \prec a'$$

或若 $$a = a' \text{ 而 } b \prec b'。$$

这个序称为$A\times B$的**字典编序**（lexicographical order）。这样称呼是因为在字典里字的先后排列次序所用的方法和这里的方法类似。

注意 若集A中的一个关系R是一个部分序，即：它是自反的、反称的和传递的，则逆关系R^{-1}也是一个部分序，这个部分序称为**逆序**（inverse order）。

部分序集的子集（Substs of ordered sets）

设A为部分序集X的一个子集。则X中的序自然地在A中诱生了一个序。即规定：对于$a, b\in A$来说，在A中有$a\precsim b$的充要条件是在X中有$a\precsim b$。更确切地说：设R是X中的一个部分序，则关系$R_A = R\cap(A\times A)$是A中的一个部分序。这个部分序R_A称为**R 在 A 上的收缩**（restriction）。部分序集（A, $\mathbf{R}_A$）称为部分序集（X, $\mathbf{R}_A$）的一个（**部分序**）**子集**（(partially ordered)subset）。

一个部分序集X的某些子集可以是全序的。显然，若X本身是全序集，则X的任何子集都是全序的。

例 5.1 设$W=\{a, b, c, d, e\}$中的一个部分序由下面的图定义：

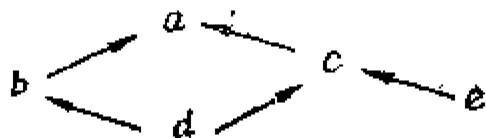


则 $\{a, c, d\}$ 与 $\{b, e\}$ 是全序子集；$\{a, b, c\}$ 与 $\{d, e\}$ 不是全序子集。

第一元素与最后元素（First and last elements）

设X为一个有序集。则元素 $a_0 \in X$ 称为X的一个**第一元素**（first element）或**最小元素**（smallest element）是指：对所有的 $x \in X$，有 $a_0 \precsim x$ 成立。类似地，若有 $b_0 \in X$ 使所有的 $x \in X$ 都满足 $x \precsim b_0$，则 b_0 称为X的一个**最后元素**（last element）或**最大元素**（largest element）。

例 6.1 设 $X = \{a, b, c, d, e\}$ 的序由下面的图定义：



则 a 是最后元素，因为 a 在每个元素后面。而X没有第一元素。元素 d 不是第一元素，因为 d 不在 e 前面。

例 6.2 具有自然序的正整数集 **N** 以 1 为第一元素，具有自然序的整数集 **Z** 既没有第一元素也没有最后元素。

极大元素与极小元素（Maximal and minimal elements）

设X为有序集。则一个元素 $a_0 \in X$ 称为**极大元素**（maximal element）是指：由 $a_0 \precsim x$ 便导致 $x = a_0$，即除了 a_0 本身外，没有其他元素在它后面。类似地元素 $b_0 \in X$ 称为**极小元素**（minimal element）是指：由 $x \precsim b_0$ 便导致 $x = b_0$，即除了 b_0 本身外，没有其他元素在它前面。

例 7.1 设 $X=\{a, b, c, d, e\}$。由例 6.1 的图定义了它的一个序。则 d 与 e 都是极小元素；a 是极大元素。

例 7.2 **R** 在自然序下是一个全序集。但它没有极大元素，也没有极小元素。

例 7.3 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 是一个有限的全序集，则 A 恰好有一个极小元素，也恰好有一个极大元素。它们分别记为

$$\min\{a_1, \cdots, a_m\} \text{ 及 } \max\{a_1, \cdots a_m\}。$$

上界与下界（Upper and lower bounds）

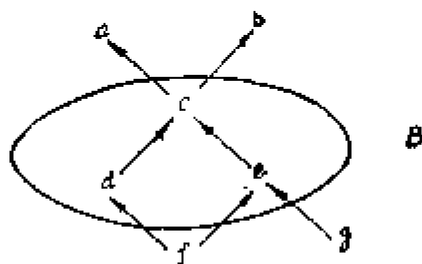
设 A 是部分序集 X 的一个子集。若元素 $m\in X$ 先于 A 中的任何元素，即对所有的 $x\in A$ 有 $m\precsim x$，则 m 称为 A 的一个**下界**（lower bound），若 A 的某个下界后于 A 的每一个下界，则这个下界称为 A 的**最大下界**（the greatest lower bound (g.l.b)）或称为**A的下确界**(infimum of A)。并记为 **inf(A)。**

类似地，若元素 $M\in X$ 后于 A 中的任何元素，即对所有的 $x\in A$ 有 $x\precsim M$，则 M 称为 A 的一个**上界**（upper bound）。若 A 的某个上界先于 A 的每个上界，则这个上界称为 A 的**最小上界**（the least upper bound (l.u.b)）或称为 **A 的上确界**(supremum of A)，并记为 **sup(A)**。

若 A 有一个上界，则称 A 为**上有界**(bounded above)。若 A 有一个下界，则称 A 为**下有界**(bounded below)。若 A 既是上有界又是下有界，则 A 称为**有界**(bounded)。

例 8.1 设对于 $X=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 用下面的图赋予部分序。令 $B=\{c, d, e\}$，则 a, b, c 是 B 的上界；f 是 B 的唯一的下界。注意：g 不是 B 的一个下界，因为 g 并不先

于 d。又：$c=\sup(B)$ 且属于 B，而 $f=\inf(B)$ 不属于 B。



例 3.2 设 A 是一个有界的实数集。则实数理论中的一个基本定理说明，在实数集的自然序下，$\inf(A)$ 与 $\sup(A)$ 是存在的。

例 3.3 设 $\mathbf{Q}$ 为有理数集，又设

$$B=\{x;\ x\in\mathbf{Q},\ x>0,\ 2<x^2<3\},$$

即 B 是由实直线上介于 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 之间的所有有理点所构成。则 B 有无穷多个上界，也有无穷多个下界，但 $\inf(B)$ 与 $\sup(B)$ 都不存在。注意：实数 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不属于 $\mathbf{Q}$，故不能看作为 B 的上界或下界。

Zorn 引理

Zorn 引理是数学中最重要的工具之一。它断定某类元素的存在性，虽然它没有给出任何结构性的步骤可以用来找出这些元素。

Zorn 引理 3.11 设 X 是一个非空的部分序集。又设它的任何全序子集都有一个上界。则 X 至少有一个最大元素。

注意 Zorn 引理等价于古典的选择公理，也等价于良序公理。这个事实的证明要利用序数的概念，它超出了本书的范围。

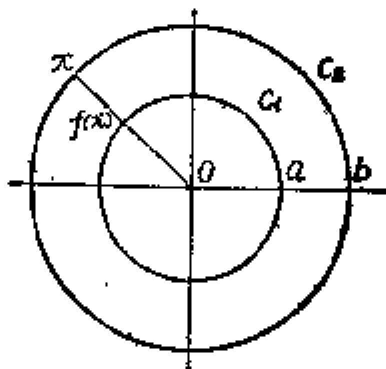
习 题 解 答

等价集，可列集

1、考察下列两个同心圆：

$C_1=\{\langle x, y\rangle:\ x^2+y^2=a^2\}$

$C_2=\{\langle x, y\rangle:\ x^2+y^2=b^2\}$。



其中 $0<a<b$，试用几何的方法建立 C_1 与 C_2 之间的一个一一对应关系。

解：设 $x\in C_2$，考察函数 f：$C_2\to C_1$，其中 $f(x)$ 是联结圆心与 x 的半径和 C_1 相交的点，如附图所示。注意：f 是 1—1 与到上的，因此它建立了 C_1 与 C_2 之间的一个一一对应。

2．求证：有理数集可列。

解：令 $\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集；$\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集。则有理数集为 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^-\cup\{0\}\cup\mathbf{Q}^+$。

令函数 f：$\mathbf{Q}^+\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 定义如下：

$$f(p/q)=\langle p, q\rangle,$$

其中 p/q 是用既约分数形式表示的正有理数。则 f 是 1—1 的，因此 $\mathbf{Q}^+$ 等价于 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的一个子集，但 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可列的（见例 2.2），故 $\mathbf{Q}^+$ 也可列。类似地，$\mathbf{Q}^-$ 也是可列的。从而由定理 3.5，$\mathbf{Q}^-\cup\{0\}\cup\mathbf{Q}^+=\mathbf{Q}$ 可列。

3．求证命题 3.1：任何集组中由 $A\sim B$ 所定义的关系是一个等价关系。就是说，它具备下列性质：

（ⅰ） 对任何集 A 有 $A\sim A$；

(ii) 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(iii) 若 $A\sim B$ 同时 $B\sim C$，则 $A\sim C$。

解：(i) 恒等函数 1_A：$A\to A$ 是 1—1 与到上的，故 $A\sim A$。

(ii) 若 $A\sim B$，则有 1—1 与到上的函数 f：$A\to B$ 存在。但这样的函数 f 有逆函数 f^{-1}：$B\to A$，而且这逆函数也是 1—1 与到上的。因此 $A\sim B$ 导致 $B\sim A$。

(iii) 若 $A\sim B$ 同时 $B\sim C$，则存在函数 f：$A\to B$ 与 g：$B\to C$，皆为 1—1 与到上的。于是其复合函数 $g\circ f$：$A\to C$ 也是 1—1 与到上的。这说明 $A\sim B$ 与 $B\sim C$ 导致 $A\sim C$。

4．求证：所有具整系数的多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$$

（即 a_0，a_1，…，a_m 为整数）所构成的集是可列的。

解：对于每对正整数 $\langle n, m\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，令 P_{nm} 表示这样的多项式 $p(x)$ 全体：它的次数是 m，而

$$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_m|=n。$$

则 P_{nm} 是一个有限集，从而

$$P=\bigcup\{P_{nm}: \langle n, m\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\}$$

作为可数集的可数并，它是可数的。特别因 P 不是有限集，故 P 是可列集。

5．一个实数 γ 若是某个具整系数的多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$$

的一个零点，则称为一个代数数(algebraic number)。求证：代数数集是可列的。

解：由上一题知道：多项式方程的集 $E=\{p_1(x)=0, p_2(x)=0, p_3(x)=0, \cdots\}$ 是可列的。设 $A_i=\{x$：x 是方程

$p_i(x)=0$ 的根}，则因为一个 n 次多项式顶多只有 n 个实的零点，所以 A_i 是有限集。因此，$A=\bigcup\{A_i; i\in \mathbf{N}\}$是可列的。

6．求证定理 3.2：任何无限集X必含一可列子集 D。

解：设 f: $\mathscr{P}(X)\to X$ 表示一个"选择函数"，即对X的每个非空子集 $A\in\mathscr{P}(X)$，有 $f(A)\in A$（选择公理保证了这种函数的存在性）。现在考察下面的序列：

$$a_1=f(X)$$
$$a_2=f(X\setminus\{a_1\})$$
$$a_3=f(X\setminus\{a_1, a_2\})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n=f(X\setminus\{a_1, \cdots a_{n-1}\})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因X是无限集，故 $X\setminus\{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ 对任何 n 而言均非空集。此外，因 f 是选择函数，故当 $i<n$ 时

$$a_n\neq a_i,$$

就是说这些 a_n 是两两不同的，从面 $D=\{a_1, a_2, \cdots\}$ 是X的一个可列子集。

上述证明的本质在于：选择函数"选"了一个元素 $a_1\in X$，然后第二个元素 a_2 应从X内"剩下"的元素中挑选，余类推。因X为无限集，故X内"剩下"的元素集均非空集。

7．求证：设任给一集 X，又令$\mathscr{C}(X)$表示X上的特征函数(characteristic functions)全体，即函数 f: $X\to\{1, 0\}$的全体，则X的势集等价于$\mathscr{C}(X)$，即$\mathscr{P}(X)\sim\mathscr{C}(X)$。

解：设A为X的任一子集，即 $A\in\mathscr{P}(X)$。令 f: $\mathscr{P}(X)\to\mathscr{C}(X)$定义如下：

$$f(A)=\chi_A=\begin{cases}0 & 若\ x\notin A\\ 1 & 若\ x\in A\end{cases}$$

则 f 是 1—1 与到上的，所以 $\mathscr{P}(X)\sim\mathscr{C}(X)$。

8．求证：可列集的子集或是有限或是可列，即可列集的子集是可数的。

解：设可列集为 $X=\{a_1, a_2, \cdots\}$，又设 A 是 X 的一个子集。若 $A=\varnothing$，则 A 是有限集。若 $A\neq\varnothing$，则设 n_1 是使 $a_{n1}\in A$ 成立的最小正整数；又设 n_2 是使 $n_2>n_1$ 与 $a_{n2}\in A$ 同时成立的最小正整数；等等。则 $A=\{a_{n1}, a_{n2}, \cdots\}$，若 $\{n_1, n_2, \cdots\}$ 有界，则 A 是有限集；否则 A 是可列集。

9．求证定理 3.3：可数集的任何子集都是可数集。

解：可数集或是有限，或是可列，在两种情况下，其子集都可数。

10．求证引理 3.4：设 $\{A_1, A_2, \cdots\}$ 是由两两互斥的可列集所构成的可列组，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可列的。

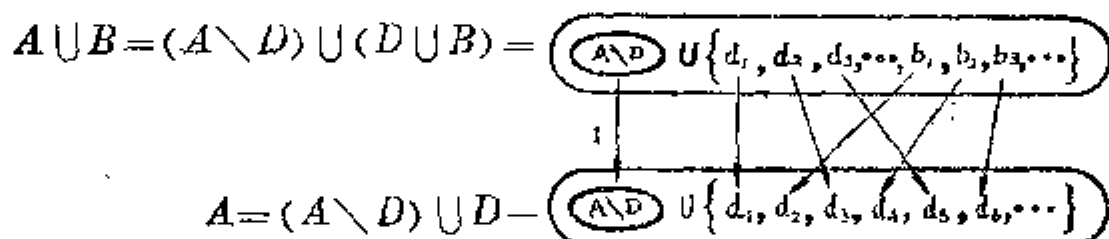
解：因为 $A_1, A_2, \cdots$ 皆可列，故可写为：

$$A_1=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\}$$
$$A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n=\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \cdots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{a_{ij}: \langle i, j\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\}$，而由 $f(a_{ij})=\langle i, j\rangle$ 定义的函数 f：$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 显然是 1—1 与到上的。故由 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的可列性便知 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列的。

11．求证：设A是无限集，$B=\{b_1, b_2, \cdots\}$是可列集。又设A与B互斥，则$A\cup B\sim A$。

解：因A是无限集，故它含一可列集$D=\{d_1, d_2, \cdots\}$。设函数f：$A\cup B\to A$由下面的图来定义：



即：
$$f(x)=\begin{cases}x & 若\ x\in A\setminus D\\ d_{2n-1} & 若\ x=d_n\\ d_{2n} & 若\ x=b_n。\end{cases}$$

注意：f是1—1与到上的，因此$A\cup B\sim A$。

连续统与势

12．求证：区间$(0, 1)$，$[0, 1)$与$(0, 1]$具有基数$\mathbf{C}$，就是说，它们都等价于$[0, 1]$。

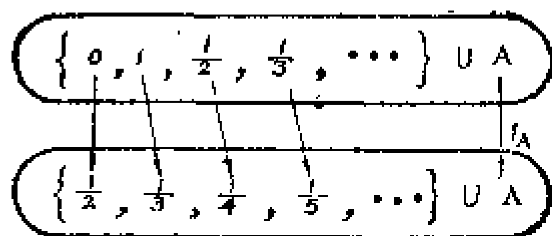
解：(i) 令$A=[0, 1]\setminus\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$

$$=(0, 1)\setminus\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$

则
$$[0, 1]=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}\cup A,$$

$$(0, 1)=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}\cup A。$$

考察函数f:$[0, 1]\to(0, 1)$，其定义如下图所示



即
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 若\ x=0\\ \frac{1}{n+2} & 若\ x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}\\ x & 若\ x\neq 0,\ \frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N},\ 即\ x\in A。\end{cases}$$

则函数 f 是 1—1 与到上的，从而$[0, 1]\sim(0, 1)$。

(ii) 由下式

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & 若\ x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}\\ x & 若\ x\neq\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}\end{cases}$$

定义的函数 f: $[0, 1]\to[0, 1)$ 是 1—1 与到上的(它与(i)中函数类似)因此，$[0, 1]\sim[0, 1)$。

(iii) 设 f: $[0, 1)\to(0, 1]$由 $f(x)=1-x$ 定义，则 f 是 1—1 与到上的。因此 $[0, 1)\sim(0, 1]$；由 (ii) 知 $[0, 1]\sim[0, 1)$，故由传递性得：$[0, 1]\sim(0, 1]$。

换句话说，$(0, 1)$，$[0, 1)$ 及 $(0, 1]$ 具有基数 $\mathbf{C}$。

13．求证下列各区间均具有连续统势，亦即具有基数 $\mathbf{C}$：$[a, b]$，(a, b)，$[a, b)$ 及 $(a, b]$，其中 $a<b$。

解：只须考察下列函数：

$$[0, 1]\xrightarrow{f}[a, b] \qquad [0, 1)\xrightarrow{f}[a, b)$$

$$(0, 1) \xrightarrow{f} (a, b) \qquad (0, 1] \xrightarrow{f} (a, b]$$

其中每个函数都由 $f(x)=a+(b-a)x$ 定义。这些函数都是1—1与到上的。因此由上一道题及命题3.1可知，这些区间都等价于[0, 1]，也就是说，都具有势**C**。

14．求证单位区间 $A=[0, 1]$不可列。

解：方法1：假设[0, 1]是可列的，即假设[0, 1]的元素可以写成一个序列：

$$[0, 1]=\{x_1, x_2, x_3, \cdots\},$$

则其中每个元素都可写成无限小数：

$$x_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots$$
$$x_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots$$
$$x_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 $a_{ij}\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，并且假定每个小数都含有无限个非零的数码，就是说对于那些可用两种小数的形式来表达的数，例如在

$$\frac{1}{2}=0.5000\cdots=0.4999\cdots$$

这样两种表达方式中，我们选择含有无限个数码9的这种方式。

现在来造一个属于 A 中的数

$$y=0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$$

造法如下：取 b_1 使 $b_1\neq a_{11}$ 且 $b_1\neq 0$；取 $b_2\neq a_{22}$ 且 $b_2\neq 0$；等等。因 y 具有符合我们规定的无限小数表达方式，故 $y\in$

[0, 1]。

但是：因 $b_1 \neq a_{11}$ 故 $y \neq x_1$；因 $b_2 \neq a_{22}$ 故 $y \neq x_2$；等等。一般说，对于任何 $n \in \mathbf{N}$，都有 $y \neq x_n$，这也就是说 $y \notin [0, 1]$，而这是不可能的。这说明：[0, 1] 可列的假定将导致矛盾。这就证明了[0, 1]是不可列的。

方法 2：设[0, 1]可列，则同方法 1 中所说一样有：

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3 \cdots\}。$$

现在造一个闭区间序列如下：考察 $A = [0, 1]$ 的以下三个闭子区间：

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right], \tag{1}$$

每个闭子区间长度是$\frac{1}{3}$。x_1 不可能同时属于这三个区间。令 $I_1 = [a_1, b_1]$ 表示 (1) 中满足 $x_1 \notin I_1$ 的一个区间。

再考察 $I_1 = [a_1, b_1]$ 的以下三个闭子区间：

$$\left[a_1, a_1 + \frac{1}{9}\right], \left[a_1 + \frac{1}{9}, a_1 + \frac{2}{9}\right], \left[a_1 + \frac{2}{9}, b_1\right], \tag{2}$$

每个区间长度是$\frac{1}{9}$。与上面类似，令 I_2 表示(2)中满足 $x_2 \notin I_2$ 的一个区间。

继续采用这种方式，可以得到一个闭区间序列

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots, \tag{3}$$

使得对所有的 $n \in \mathbf{N}$ 均满足 $x_n \notin I_n$。由实数的区间套性质 (nested interval property)（见附录 A），有一个实数 $y \in A = [0, 1]$ 使得 y 属于(3)中每个区间。但是

$y \in A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 导致 $y = x_{m_0}$ 对于某个 $m_0 \in \mathbf{N}$ 成立。而由上面的构造法 $y = x_{m_0} \notin I_{m_0}$，这与 y 属于(3)中每个区间

的事实发生矛盾。这说明开始时关于A为可列的假设导致了矛盾。换句话说，A是不可列的。

15．求证 Schroeder-Bernstein 定理：若$X\supset Y\supset X_1$且$X\sim X_1$，则$X\sim Y$。

解：因$X\sim X_1$，故有1—1与到上函数f：$X\to X_1$存在。

但$X\supset Y$，故f在Y的收缩（仍记为f）也是1—1的。从而Y等价于X_1的一个子集Y_1，即$Y\sim Y_1$，其中

$$X\supset Y\supset X_1\supset Y_1,$$

并且f：$Y\to Y_1$是1—1与到上的。但现在$Y\supset X_1$，因此由同样的推理可知有X_2使$X\sim X_2$，其中

$$X\supset Y\supset X_1\supset Y_1\supset X_2,$$

并且f：$X_1\to X_2$是1—1与到上的。依此类推，可得等价集列X_1，X_2，X_3，…及等价集列Y_1，Y_2，Y_3，…，满足下面的关系：

$$X\supset Y\supset X_1\supset Y_1\supset X_2\supset Y_2\supset\cdots。$$

现在令

$$B=X\cap Y\cap X_1\cap Y_1\cap X_2\cap Y_2\cap\cdots$$

则
$$X=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X_1)\cup(X_1\setminus Y_1)\cup\cdots B$$
$$Y=(Y\setminus X_1)\cup(X_1\setminus Y_1)\cup(Y_1\setminus X_2)\cup\cdots B。$$

同时有：

$$(X\setminus Y)\sim(X_1\setminus Y_1)\sim(X_2\setminus Y_2)\sim\cdots$$

特别地：函数f：$(X_n\setminus Y_n)\sim(X_{n+1}\setminus Y_{n+1})$是1—1与到上的。

现在考察由下图所定义的函数g：$X\to Y$。

即
$$g(x)=\begin{cases}f(x) & 若\ x\in X\setminus Y\ 或\ x\in X_i\setminus Y_i\\ x & 若\ x\in Y_i\setminus X_{i+1}\ 或\ x\in B.\end{cases}$$

则 g 是 1—1 与到上的，从而 $X\sim Y$。



16．求证 Cantor 定理：任何集 A 的势集 $\mathscr{P}(A)$ 比 A 具有更大的势，即：$A\prec\mathscr{P}(A)$ 从而 $\#(A)<\#\mathscr{P}(A)$。

解：考察由式子 $g(a)=\{a\}$ 定义的函数 g：$A\to\mathscr{P}(A)$，即把 A 的每个元素 a 映照为单元素集 $\{a\}$ 的函数。它是 1—1 的，故 $A\preceq\mathscr{P}(A)$。

若能证明 A 不等价于 $\mathscr{P}(A)$，则定理便成立。为此，用反证法。即：假设有 1—1 与到上函数 f：$A\to\mathscr{P}(A)$ 存在。

若 a 不是它的象集的元素，即当 $a\in A$ 而 $a\notin f(a)$ 时，称 a 为一个“坏”的元素。令 B 表示“坏”元素的集，即

$$B=\{x;\ x\in A,\ x\notin f(x)\}$$

注意 B 是 A 的子集，即 $B\in\mathscr{P}(A)$。由于 f：$A\to\mathscr{P}(A)$ 是到上的，故有 $b\in A$ 使 $f(b)=B$。试问：b 是否“坏”的？若 $b\in B$，则由 B 的定义，$b\notin f(b)=B$，这不可能。若 $b\notin B$，则 $b\in f(b)=B$，这又不可能。由此可见原来的假设 $A\sim\mathscr{P}(A)$ 导致矛盾。

这说明 $A\sim\mathscr{P}(A)$ 是错误的。因而定理得证。

（半）序集与其子集

17．设对正整数集赋序如下：每两个正整数 $a,a'\in\mathbf{N}$ 可唯一地写成如下形式

$$a=2^r(2s+1),\quad a'=2^{r'}(2s'+1)^*$$

* 译注：原文为 $a'=a^{r'}(as'+1)$，疑为排版中错误，予以改正。

其中 $r, r', s, s' \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$。规定：

当 $r<r'$ 时，或 $r=r'$ 而 $s<s'$ 时，称 $a<a'$。试在下列几对数中填入正确的符号<或>（这里 $x>y$ 当且仅当 $y<x$）：

(i) 5____14 (ii) 6____9 (iii) 3____20 (iv) 14____21。

解：**N** 的元素可以列成下表

r \ s	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1	3	5	7	9	11	13	15	…
1	2	6	10	14	18	22	26	30	…
2	4	12	20	28	36	44	52	60	…
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……

上一行的数先于下一行的数；同一行中左边的数先于右边的数。问题的答案是：

(i) $5<14$ (ii) $6>9$ (iii) $3<20$ (iv) $14>21$。

18．设 $A=\{a, b, c\}$ 用下面的图赋序：



设 $\mathscr{A}$ 表示 A 的一切非空的全序子集所构成的集组。并令 $\mathscr{A}$ 按集的包含关系而成为部分序集。试画出 $\mathscr{A}$ 的序的图。

解：$\mathscr{A}$ 的全序子集有：$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$。因 $\mathscr{A}$ 按集的包含关系赋序，故 $\mathscr{A}$ 的序如下图：



19．设 $A=\{2, 3, 4, \cdots\}=\mathbf{N}\setminus\{1\}$。又设对 A 用"x 整除 y"来赋序（即：若 x 整除 y，则 x 先于 y）。

(i) 求 A 的极小元素；(ii) 求 A 的极大元素。

解：(i) 设 $p\in A$ 是素数，则 p 只被 p 所整除(因 $1\notin A$) 故任何素数皆为极小元素。此外，若 $a\in A$ 不是素数，则有 $b\in A$ 能整除 a，即 $b\prec a$，故 a 不是极小元素。换句话说，极小元素恰好就是那些素数。

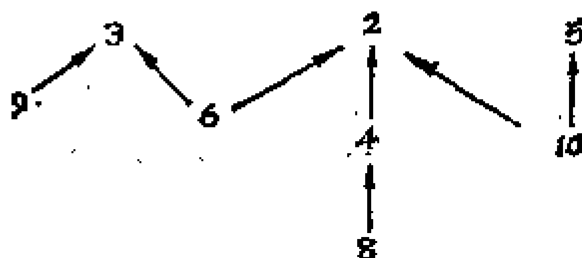
(ii) 没有极大元素，因为：例如若 $a\in A$，则 a 整除 $2a$。

20．设对 $B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 以"x 是 y 的倍数"赋序（即这时 $x\prec y$）。

（i）求 B 的所有的极大元素；

（ii）求 B 的所有的极小元素。

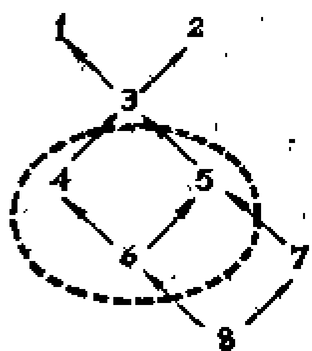
解：可作 B 的序图如下：



（i）极大元素有 2，3，5。

（ii）极小元素有 6，8，9，10。

21．设对 $W=\{1, 2, \cdots, 7, 8\}$ 赋序如下：



现考察 W 的子集 $V=\{4, 5, 6\}$，(i) 求 V 的上界集，(ii) 求 V 的下界集，(iii) $\sup(V)$ 是否存在？(iv) $\inf(V)$ 是否存在？

解：(i) $\{1, 2, 3\}$ 中每个元素且仅有这些元素是处于 V 的每个元素之后，

因此上界集$=\{1, 2, 3\}$。

(ii) 只有6和8先于V中每个元素，因此下界集$=\{6, 8\}$。

(iii) 因3是V的上界集中第一元素，故$\sup(V)=3$。注意$3\notin V$。

(iv) 因6是V的下界集中最后元素，故$\inf(V)=6$。注意$6\in V$。

22. 设$\mathscr{A}$为一个集组，用集包含关系赋序。又设$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$的一个子组。

(i) 若$A\in\mathscr{A}$是$\mathscr{B}$的一个上界，则$\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}\subset A$。

(ii) $\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$是不是$\mathscr{B}$的一个上界？

解：(i) 若$x\in\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$，则有$B_0\in\mathscr{B}$使得$x\in B_0$。但$A$是$\mathscr{B}$的一个上界，故$B_0\subset A$，从而$x\in A$，因此$\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}\subset A$。

(ii) 虽然$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$的一个子组，但$\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$不一定属于$\mathscr{A}$。故：$\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$是$\mathscr{B}$的一个上界的充要条件是它属于$\mathscr{A}$。

Zorn 引理的应用

23. 求证：设X是一个部分序集。则有X的一个全序子集存在，它不是X的任何其他全序子集的真子集。

解：设$\mathscr{A}$为X的所有全序子集所构成的集组。对$\mathscr{A}$用集的包含关系赋序。我们将用 Zorn 引理来证：$\mathscr{A}$具有一个极大元素。为此，设$\mathscr{B}=\{B_i: i\in I\}$为$\mathscr{A}$的一个全序子组。并令$A=\bigcup\{B_i: i\in I\}$。则因所有的$B_i\in\mathscr{B}$都满足$B_i\subset X$，故$A\subset X$。

下面来证A是一个全序集。设a，$b\in A$；则有B_j，$B_k\in\mathscr{B}$使得$a\in B_j$，$b\in B_k$。

但$\mathscr{B}$是用集的包含关系赋序的全序组，故B_j与B_k中的一个是另一个的子集，例如$B_j\subset B_k$，则a，$b\in B_k$。而已知$B_k\in\mathscr{B}$是X的一个全序子集，所以或者是$a\preceq b$或者是$b\preceq a$。这说明A是X的一个全序子集，亦即$A\in\mathscr{A}$。

但对任何$B_i\in\mathscr{B}$都有$B_i\subset A$，故A是$\mathscr{B}$的一个上界。以上推理说明$\mathscr{A}$的任何一个全序子组都有在$\mathscr{A}$内的上界，于是根据Zorn引理，$\mathscr{A}$有一个极大元素，即X有一个全序子集，它在$\mathscr{A}$的序中不先于$\mathscr{A}$中的任何元素，亦即它不是X的任何其他全序子集的真子集。

24．求证：设R是由A到B的一个关系，即：$R\subset A\times B$。又设R的定义域是A。则有R的一个子集f^*存在，使f^*是一个由A到B的函数。

解：令$\mathscr{A}$表示R中所有那样的子集所构成的集组，即：每个$f\in\mathscr{A}$都是由A的某个子集到B的函数。令$\mathscr{A}$用集的包含关系赋序。则当f：$A_1\to B$是g：$A_2\to B$的一个子集时，就有$A_1\subset A_2$。

现在令$\mathscr{B}=\{f_i:\ A_i\to B\}_{i\in I}$是$\mathscr{A}$的一个全序子组，则（见补充习题44）$f=\bigcup\limits_i f_i$是一个由$\bigcup\limits_i A_i$到$B$的函数。此外$f\subset R$，故$f$是$\mathscr{B}$的一个上界，于是由Zorn引理，$\mathscr{A}$有极大元素$f^*$：$A^*\to B$。若能证明$A^*=A$，则定理得证。

设$A^*\neq A$，则有$a\in A$使得$a\notin A^*$。但由假设，R的定义域是A，故必有有序偶$\langle a,b\rangle\in R$。这样，$f^*\cup\{\langle a,b\rangle\}$将是一个由$A^*\cup\{a\}$到$B$的函数，而这和$f^*$是$\mathscr{A}$的一个极大元素的假设是互相矛盾的，因此必须有$A^*=A$。定理证毕。

补 充 习 题

等价集，势

25．求证：每一个无限集等价于它自己的一个真子集。

26．求证：若 A 与 B 是可列的，则 $A\times B$ 也是可列的。

27．求证：平面 R^2 中具有理数坐标的点集是可列的。

28．一个实数 x 如不是代数数，即如 x 不是整系数多项式方程

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=0$$

的根（见习题5），则称为超越数，例如 π 与 e 是超越数。

（i）求证超越数集 T 是不可列的。

（ii）求证 T 有连续统的势，即具有基数 $\mathbf{C}$。

29．基数的乘法运算定义如下：

$$\#(A)\#(B)=\#(A\times B)$$

(i) 求证运算定义是合理的，即

$$\#(A)=\#(A') \text{ 与 } \#(B)=\#(B')$$

导致 $$\#(A)\#(B)=\#(A')\#(B')$$

或等价地，$A\sim A'$ 与 $B\sim B'$ 导致 $(A\times B)\sim(A'\times B')$；

(ii) 求证：(a) $\aleph_0\aleph_0=\aleph_0$，(b) $\aleph_0\mathbf{C}=\mathbf{C}$，

(c) $\mathbf{CC}=\mathbf{C}$。

30．基数的加法运算定义如下：

$$\#(A)+\#(B)=\#(A\times\{1\}\cup B\times\{2\})$$

（i）求证若 $A\cap B=\varnothing$，则 $\#(A)+\#(B)=\#(A\cup B)$

（ii）求证运算的定义是合理的，即

$$\#(A)=\#(A') \text{ 与 } \#(B)=\#(B')$$

导致 $\#(A)+\#(B)=\#(A')+\#(B')$。

31. 基数的幂运算定义如下：

$$\#(A)^{\#(B)}=\#(\{f:\ f:\ B\to A\})$$

(i) 求证若 $\#(A)=m$ 与 $\#(B)=n$ 是有限基数，则

$$\#(A)^{\#(B)}=m^n。$$

即在有限基数情形，对基数的幂运算相应于通常正整数幂的运算。

(ii) 求证运算的定义是合理的，即

$$\#(A)=\#(A') \text{ 与 } \#(B)=\#(B')$$

导致 $$\#(A)^{\#(B)}=\#(A')^{\#(B')}。$$

(iii) 求证：对任一集合 A，$\#(\mathscr{P}(A))=2^{\#(A)}$。

32. 设～是 **R** 中的等价关系，定义如下：

$$x\sim y \text{ iff } x-y \text{ 是有理数，}$$

试确定商集 **R**/～的势。

33. 求证从 $[0,1]$ 到 **R** 的所有函数集组的基数为 2^c。

34. 求证 Schroeder-Bernstein 定理 3.8 的下面两个断言是等价的。

(i) 若 $A\precsim B$ 与 $B\precsim A$，则 $A\sim B$。

(ii) 若 $X\supset Y\supset X_1$ 且 $X\sim X_1$，则 $X\sim Y$。

35. 求证定理 3.9：对于任何两个集合 A 与 B，或 $A\prec B$ 或 $A\sim B$ 或 $B\prec A$，三者必居其一（提示：用 Zorn 引理）。

序集与子集

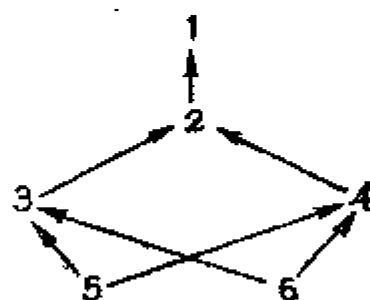
36. 设 $A=(\mathbf{N},\leqslant)$ 为具有自然序的正整数集，又设 $B=(\mathbf{N},\geqslant)$，具有反序的正整数集。而且，设 $A\times B$ 表示先按照 A 然后按照 B 的序构成的 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的字典编序。试在 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$

的每一对元素间插入正确的符号$\prec$或$\succ$：

(i) $\langle 3, 8\rangle$____ $\langle 1, 1\rangle$，(ii) $\langle 2, 1\rangle$____$\langle 2, 8\rangle$，

(iii) $\langle 3, 3\rangle$____$\langle 3, 1\rangle$，(iv) $\langle 4, 9\rangle$____$\langle 7, 15\rangle$。

37．设$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$具有如附图所示的序，考虑X的子集$A=\{2, 3, 4\}$。(i) 求X的极大元素。(ii) 求X的极小元素。(iii) X是否有第一元素？(iv) X是否有最后元素？(v) 求A的上界集。(vi) 求A的下界集。(vii) $\sup(A)$存在否？(viii) $\inf(A)$存在否？



38．考虑具有自然序的有理数集Q，及其子集$A=\{x: x\in Q, x^3<3\}$，(i) A上有界否？(ii) A下有界否？(iii) $\sup(A)$存在否？(iv) $\inf(A)$存在否？

39．设整数集$\mathbf{N}$，以"x整除y"赋序，并设$A\subset\mathbf{N}$。(i) $\inf(A)$存在否？(ii) $\sup(A)$存在否？

40．求证：每一有限的部分序集有一个极大元素。

41．给一个恰好具有一个极大元素但没有最后元素的有序集的例子。

42．求证：若R是A上的部分序，则R^{-1}也是A上的一个部分序。

Zorn 引理

43．考虑下面断言的证明：存在一个正整数的有限集，它不是正整数的任何别的有限集的真子集。

证明：设$\mathscr{A}$是正整数的所有有限集组。按集的包含关系

对$\mathscr{A}$赋序部分序。现设$\mathscr{B}=\{B_i: i\in I\}$是$\mathscr{A}$的全序子组。考虑集$A=\bigcup_i B_i$，注意对每一$B_i\in\mathscr{B}$，$B_i\subset A$，因而$A$是$\mathscr{B}$的上界。

因为每一全序子集有一个上界，据Zorn引理，$\mathscr{A}$有一个极大元素，它是一个有限集，它不是任何其他有限集的真子集。

问题：因为断言显然是错的，证明中哪一步是不对的？

44．求证在习题24的证明中所假设的下面事实：

设$\{f_i: A_i\to B\}$是一个函数集组，按集的包含关系是全序的，则$\bigcup_i f_i$是一个从$\bigcup_i A_i$到B的一个函数。

45．求证下列两个断言是等价的：

(i)（选择公理）非空集的一个非空组的积$\prod\{A_i: i\in I\}$是非空的。

(ii) 若$\mathscr{A}$是一个非空互斥集的非空组，则存在一个子集$B\subset\bigcup\{A: A\in\mathscr{A}\}$使$B$与每个集$A\in\mathscr{A}$的交恰好包含一个元素。

46．求证：一个有序集X的每一全序子集在X中有一个下界，则X有一个极小元素。

补充习题答案

32．C。

36．(i) $\succ$，(ii) $\succ$，(iii) $\prec$，(iv) $\prec$。

37．(i) $\{1\}$；(ii) $\{5, 6\}$；(iii) 没有；(iv) 有，1；(v) $\{1, 2\}$；(vi) $\{5, 6\}$；(vii) 存在，2；(viii) 不存在。

38. (i) 是, (ii) 否, (iii) 不存在, (iv) 不存在。

36. (i) $\inf(A)$ 存在 iff $A \neq \varnothing$ (ii) $\sup(A)$ 存在 iff A 有限。

41. $$\begin{array}{l} a \\ \uparrow \\ 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \cdots \end{array}$$

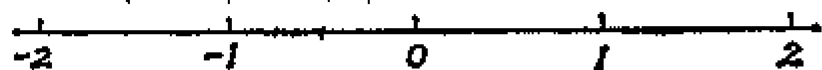
这里 a 是极大元素但 a 不是最后元素。

第四章 直线和平面的拓扑

实直线（Real line）

实数(real number)集，通常用 **R** 表示，在数学中特别是在分析学中起着极重要的作用。拓扑学的许多概念实际上是实数集一些性质的抽象化。集 **R** 的特征可以用一句话来概括："**R** 是一个完备的、阿基米德有序体。"这些概念将在附录中说明。在这里我们用 **R** 内的序关系来定义**R**的"通常拓扑"。

假定读者熟悉用直线上的点对 **R** 作的几何表示。如在下图内，用称为原点的点来表示 0，而用另一点，通常放在



0 的右边，来表示 1。则直线上的点与实数之间可以用一种自然的方式对起来，即每点表示唯一的一个实数，同时每个实数可以用直线上唯一的一个点来表示。由于这个理由，我们把此直线称为**实直线** (real line) 或**实轴** (real axis)。而且对"点"和"数"这两个名词不作区别地加以使用。

R 中的开集（Open sets in R）

设 A 为某一实数集，则一点 $p\in A$ 称为 A 的一个**内点**

(Interior point) 是指 p 属于包含在 A 内的某个开区间 S_p，即：

$$p\in S_p\subset A。$$

集 A 称为**开集**(open set) 或称 $\mathscr{U}$—开集（这个 $\mathscr{U}$ 字的意义将在下章中说明）是指它的每一点都是内点。

例 1.1 一个开区间 $A=(a, b)$ 是一个开集，因为对于每个 $p\in A$ 可以选择 $S_p=A$。

例 1.2 实直线 $\mathbf{R}$ 本身是开集，因为任何开区间 S_p 必是 $\mathbf{R}$ 的子集；即 $p\in S_p\subset\mathbf{R}$*。

注意：一个集不是开集的充要条件是它至少含有这样的一点，这点不是内点。

例 1.3 闭区间 $[a, b]=B$ 不是开集，因为含 a 或含 b 的任何开区间一定含有 B 外的点，所以端点 a 和 b 都不是 B 的内点。

例 1.4 空集 $\varnothing$ 是开集，因为在 $\varnothing$ 中不可能有这样的点，它不是一个内点。

例 1.5 下列无限开区间（即下面列出的 $\mathbf{R}$ 的一些子集）是开集：

$$\{x: x\in\mathbf{R}, x>a\}=(a, \infty)$$
$$\{x: x\in\mathbf{R}, x>a\}=(-\infty, a)$$
$$\{x; x\in\mathbf{R}\}=(-\infty, \infty)$$

另一方面，下列无限半开区间（即下列的 $\mathbf{R}$ 的一些子集）

$$\{x: x\in\mathbf{R}, x\geqslant a\}=[a, \infty)$$
$$\{x: x\in\mathbf{R}, x\leqslant a\}=(-\infty, a]$$

不是开集，因为 $a\in\mathbf{R}$ 不是 $[a, \infty)$ 的内点，也不是 $(-\infty, a]$ 的内点。

---

* 译注：对于每点 $p\in\mathbf{R}$，可取 $S_p=(p-1, p+1)$。

关于开集有以下两个基本定理：

定理4.1 **R**中任意多个开集的并也是开集。

定理4.2 **R**中有限个开集的交是开集。

下面的例子说明，定理4.2中要求开集的个数有限这个条件是不可免除的。

例1.6 考察下列的开区间组（自然也就是开集组）：

$$\left\{A_n=\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right): n\in \mathbf{N}\right\}$$

即：
$$\left\{(-1, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \cdots\right\}$$

注意这些开区间的交

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{0\}$$

是由单一的点0组成，而$\{0\}$不是开集。换句话说，任意多个开集的交不必是开集。

聚点（Accumulation points）

设A是**R**的一个子集，即：A是一个实数集，则一点$p\in \mathbf{R}$称为A的一个**聚点**(accumulation point)或称为A的一个**极限点**(limit point)是指每个含p的开集G都含有A的一个异于p的点，即：

$$G\text{开}, p\in G\Longrightarrow A\cap(G\setminus\{p\})\neq\varnothing。$$

A的聚点集，记为A'，称为A的**导集**(derived set)。

例2.1 设$A=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$。则点0是$A$的一个聚点，因为含0的任何开集$G$必含有开区间$(-a_1, a_2)\subset G$使$-a_1<0<a_2$，且$(-a_1, a_2)$含有$A$的点，故0是$A$的一个

聚点。



注意：A的聚点0不属于A；同时除了0以外，A没有其他的聚点，故A的导集是单元素集$\{0\}$，即$A'=\{0\}$。

例 2.2 考察有理数集 **Q**。每个实数 $p\in\mathbf{R}$ 都是 **Q** 的一个极限点，这是因为任何开集都含有有理数，也就是都含有 **Q** 的点。

例 2.3 整数集 $\mathbf{Z}=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 没有聚点。换句话说，**Z** 的导集是空集 $\varnothing$。

注意： 不要混淆“一个集的极限点”和“数列的极限”这两个概念。它们虽有联系但是不相同的。有些习题解答和补充习题将说明这两个概念之间的关系。

Bolzano—Weierstrass 定理

对于各种不同的集来说是否存在聚点，这是拓扑学中的一个重要问题。并非每个集都有聚点，即使它是无限集也罢（如例 2.3 所示）。但是存在着一种重要的一般情况，对这个问题给出了肯定的回答。

定理 4.3 (Bolzano-Weierstrass)

一个有界的、无限的实数集 A 至少有一个聚点。

闭集（Closed sets）

R 的一个子集（即一个实数集）A 称为**闭集** (closed set) 是指 A^c 是一个开集。

一个闭集也可以用它的聚点来刻划：

定理 4.4 **R** 的子集 A 是闭的充要条件是它含有它所有的聚点。

例 3.1 闭区间 $[a, b]$ 是一个闭集，因为它的补集是两个无限开区间的并 $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$，而开集的并是开集。

例 3.2 集 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ 不是闭集，因为正如在例 2.1 所看到的那样，它的聚点 0 不属于它。

例 3.3 空集 $\varnothing$ 与整条直线 **R** 都是闭集，因为它们的补集分别为 **R** 与 $\varnothing$，而 **R** 与 $\varnothing$ 都是开集。

如在下例中所看到的：有些集既非开集也非闭集。

例 3.4 考察左开右闭区间 $A=(a, b]$。则 A 非开集因为 $b \in A$ 不是 A 的一个内点；同时 A 也非闭集因为 $a \notin A$，但 a 是 A 的一个聚点。

Heine—Borel 定理

下面的定理给出有界闭区间的最重要的性质之一。

我们说："集组 $\mathscr{A}=\{A_i\}$ **覆盖**(cover)一个集 A"，是指：A 含在 $\mathscr{A}$ 的元素的并之中，即 $A \subset \bigcup_i A_i$。

定理 4.5 (Heine-Borel) 设 $A=[c, d]$ 为有界闭区间，又设开区间组 $\mathscr{G}=\{G_i: i \in I\}$ 复盖 A，即 $A \subset \bigcup_i G_i$，则 $\mathscr{G}$ 含有一个有限子组，例如说 $\{G_{i_1}, \cdots, G_{i_m}\}$，它也复盖 A，即：

$$A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_m}.$$

注意：A 必须具备有界和闭这两个条件，否则定理就可

能不成立。用下面二例说明。

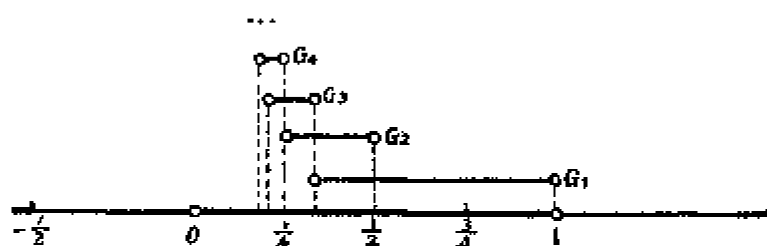
例 4.1 考察有界开区间（单位区间）$A=(0, 1)$。则下面的开区间组

$$\mathscr{G}=\left\{G_n=\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right): n\in \mathbf{N}\right\}$$

是复盖A的，即

$$A\subset\left(\frac{1}{3}, 1\right)\cup\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)\cup\cdots$$

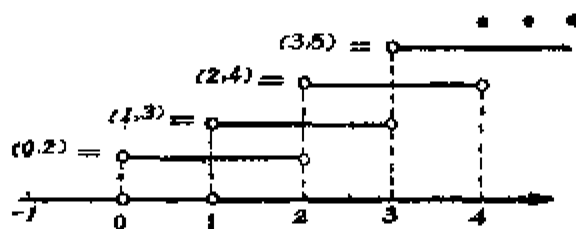
然而，$\mathscr{G}$的任何有限子组都不能复盖A。



例 4.2 考察无限闭区间$A=[1, \infty)$。则开区间组

$$\mathscr{G}=\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), \cdots\}$$

复盖A。但它的任何一个有限子组都不能复盖A。



序列（Sequences）

一个**序列**(sequence)，记为

$$\langle s_1, s_2, \cdots\rangle \text{ 或 } \langle s_n: n\in \mathbf{N}\rangle \text{ 或 } \langle s_n\rangle$$

是以$\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$为定义域的一个函数，就是说，对于每个正整数$n\in \mathbf{N}$，它指定了一个点$s_n$与之对应。$n\in \mathbf{N}$的

象记为 s_n 或 $s(n)$，称为序列的第 n 项(the n-th term)。

例 5.1 下面几个序列

$$\langle s_n\rangle=\langle 1, 3, 5, \cdots\rangle$$

$$\langle t_n\rangle=\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\rangle$$

$$\langle u_n\rangle=\langle 1, 0, 1, 0, \cdots\rangle$$

可以分别用式子表示如下：

$$s(n)=2n-1$$

$$t(n)=\frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$u(n)=\frac{1}{2}(1+(-1)^{n+1})=\begin{cases}1 & \text{若 } n \text{ 是奇数}\\ 0 & \text{若 } n \text{ 是偶数。}\end{cases}$$

一个序列 $\langle s_n: n\in\mathbf{N}\rangle$ 称为有界的，是指其值域 $\{s_n: n\in\mathbf{N}\}$ 是一个有界集。

例 5.2 考察例 5.1 中的三个序列。$\langle s_n\rangle$ 的值域 $\{1, 3, 5, \cdots\}$ 无界，所以 $\langle s_n\rangle$ 不是有界序列。$\langle t_n\rangle$ 的值域 $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots\right\}$ 是有界集，所以 $\langle t_n\rangle$ 是有界序列。$\langle u_n\rangle$ 的值域是有限集 $\{0, 1\}$，所以 $\langle u_n\rangle$ 也是有界序列。

注意：$\langle s_n: n\in\mathbf{N}\rangle$ 表示序列，它是一个函数。另一方面，$\{s_n: n\in\mathbf{N}\}$ 表示序列的值域，它是一个集。

收敛序列（Convergent sequences）

收敛序列的通常定义叙述如下：

定义 设已给实数序列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$。若实数 $b\in\mathbf{R}$ 具备以下性质：对于任何 $\epsilon>0$，有正整数 n_0 存在，使当

$n>n_0$ 时就有 $|a_n-b|<\varepsilon$ 成立。则称 b 为数列 $\langle a_n: n\in\mathbf{N}\rangle$ 的极限，或称数列 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 b，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n=b \text{ 或 } \lim a_n=b \text{ 或 } a_n\to b。$$

注意 $|a_n-b|<\varepsilon$ 意思是 $b-\varepsilon<a_n<b+\varepsilon$ 或 $a_n\in$ 包含 b 的开区间 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 内。此外，因为序号为 n_0 以后的任何项都落在区间 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 之内，所以只有 a_{n_0} 之前的有限项，可以落在区间 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 之外。

因此我们可以把上述定义改述如下：

定义 若含 b 的任何开集都含有数列 $\langle a_n: n\in\mathbf{N}\rangle$ 的**几乎所有**(almost all)的项，则称 b 为此数列的极限。

例 6.1 一个常数列 $\langle a_0, a_0, a_0, \cdots\rangle$，例如 $\langle 1, 1, 1, \cdots\rangle$ 或 $\langle -3, -3, -3, \cdots\rangle$ 收敛于 a_0，因为每个包含 a_0 的开集包含了数列的每一项。

例 6.2 下面的每个序列

$$\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\rangle, \left\langle 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \cdots\right\rangle,$$

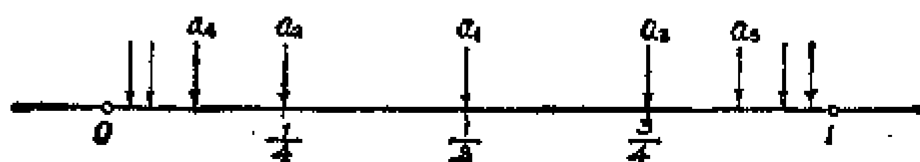
$$\left\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots\right\rangle$$

都收敛于 0，因为每个包含 0 的开区间包含了上面每个序列的几乎所有的项。

例 6.3 考察序列 $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \cdots\right\rangle$，即序列

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{(n+2)/2}} & \text{若 } n \text{ 是偶数} \\ 1-\dfrac{1}{2^{(n+1)/2}} & \text{若 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

这些点的分布如下图所示。



注意含 0 或 1 的任何一个开区间都包含序列中的无限多个项。虽然 0，1 是序列的**值域**(range) 的聚点，就是说是集 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \cdots\right\}$ 的聚点，但 0 和 1 都不是序列的极限。

子列 (Subsequences)

设已给一序列 $\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\rangle$，若 $\langle i_n\rangle$ 是一列正整数，满足 $i_1<i_2<\cdots$，则

$$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \cdots\rangle$$

称为 $\langle a_n: n\in\mathbf{N}\rangle$ 的一个**子列** (subsequence)。

例 7.1 考察序列 $\langle a_n\rangle=\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\rangle$。则 $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right\rangle$ 是 $\langle a_n\rangle$ 的一个子列，但是 $\left\langle \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \cdots\right\rangle$ 不是 $\langle a_n\rangle$ 的子列，因为在原来数列中 1 出现于 $\frac{1}{2}$ 之前。

例 7.2 虽然例 6.3 中的序列 $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \cdots\right\rangle$ 是不收敛的，但它含有收敛的子列，例如 $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},\right.$

$\frac{1}{16}, \cdots \rangle$ 及 $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots \right\rangle$。另一方面，数列 $\langle 1, 3, 5, \cdots \rangle$ 没有任何收敛的子列。

正如上面的例子所示：一个数列可以含有收敛的子列，也可以不含收敛的子列。但在某种非常重要的情况下，收敛的子列是存在的。

定理 4.6 任何有界实数列必含有收敛的子列。

Cauchy 序列（Cauchy sequence）

一个实数列 $\langle a_n: n \in \mathbf{N} \rangle$ 称为 **Cauchy 序列**，是指对任何 $\varepsilon > 0$，存在着正整数 n_0，使当

$$n, m > n_0 \text{ 时就有 } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

成立。换句话说，当 n 充分大时，数列的项就可以互相任意靠近，则称此数列为～Cauchy 序列。

例 8.1 设 $\langle a_n: n \in \mathbf{N} \rangle$ 是一个各项皆为整数的 Cauchy 序列，即它的每项 $\in \mathbf{Z} = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$。则此序列必取下面的形式

$$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, b, \cdots \rangle$$

即在第 n_0 项以后序列的各项皆为常数。因为若取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，则

$$a_n, a_m \in \mathbf{Z} \text{ 及 } |a_n - a_m| < \frac{1}{2} \Longrightarrow a_n = a_m。$$

例 8.2 我们来证明每个收敛序列都是一个 Cauchy 序列。

设 $a_n \to b$，又设 $\varepsilon > 0$，则有充分大的 $n_0 \in \mathbf{N}$ 存在，使得

$$n > n_0 \Longrightarrow |a_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ 同时 } m > n_0 \Longrightarrow |a_m - b| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

由此得，$n, m > n_0 \Longrightarrow |a_n - a_m| = |a_n - b + b - a_m|$

$$\leqslant |a_n - b| + |b - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon。$$

因此 $\langle a_n \rangle$ 是一个 Cauchy 序列。

完备性 (Completeness)

一个实数集 A 称为**完备的**(complete)，是指由 A 中的点所构成的任何 Cauchy 序列 $\langle a_n \in A;\ n \in \mathbf{N} \rangle$ 都收敛于 A 中的一个点。

例 9.1 整数集 $\mathbf{Z} = \langle \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \rangle$ 是完备的，因为如在例 8.1 中所看到的，由 $\mathbf{Z}$ 中的点所构成的 Cauchy 数列必须具备以下形式：

$$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, \cdots \rangle$$

它收敛于 $b \in \mathbf{Z}$。

例 9.2 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是不完备的，因为我们可以选一个有理数列如 $\langle 1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots \rangle$ 使它收敛于非有理数的实数 $\sqrt{2}$ (即$\sqrt{2}$ 不属于 $\mathbf{Q}$)。

实数集 $\mathbf{R}$ 的一个根本性质是：它是完备的，即：

定理 4.7 (Cauchy) 每个 Cauchy 实数列必收敛于一个实数。

连续函数 (Continuous functions)

关于连续函数的通常的 ε—δ 定义可叙述如下：

定义 设已给一个函数 f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$。若它在点 x_0 有以下的性质：对于任何 $\varepsilon > 0$，有 $\delta > 0$ 存在，使得

当 $|x - x_0| < \delta$ 时就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，

则称此函数在点 x_0 **连续**(continuous)。若 f 在每一点都

连续，则称 f 为一个**连续函数**(continuous function)。

注意：$|x-x_0|<\delta$ 意思是 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，也就是 $x\in$ 开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$。类似地 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 意思是$f(x)\in$开区间$(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$。因此，命题

$$“|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon”$$

等价于

$$“x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \Longrightarrow f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)”,$$

而这又等价于

$$“f[(x_0-\delta, x_0+\delta)]\subset(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)”。$$

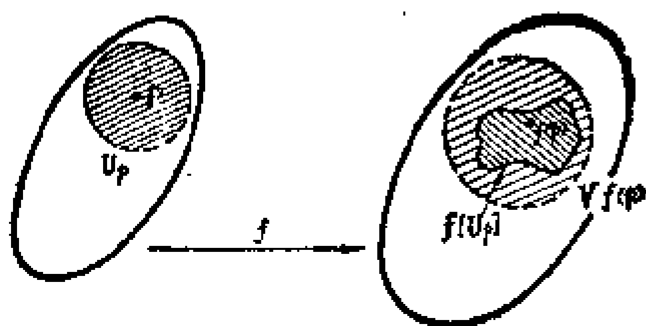
故连续性定义也可以改述如下：

定义 函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 称为在点 $p\in\mathbf{R}$ 连续，是指对于任何含 $f(p)$的开集 $V_{f(p)}$，有含p的开集 U_p存在，使得

$$f[U_p]\subset V_{f(p)},$$

如果f在每点都连续，则称f为一个连续函数。

下面的 Venn 图可以帮助理解这个定义。



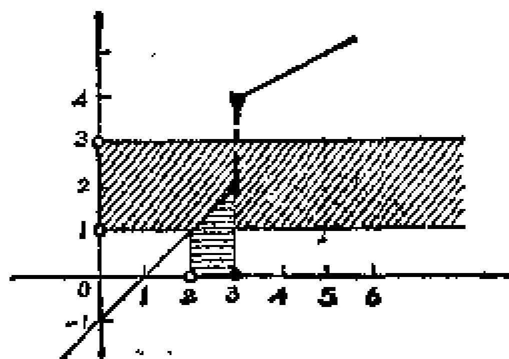
连续函数概念可以用开集完整地描述。

定理 4.8 一个函数连续的充要条件是任何开集的逆象也是开集。

注意：定理 4.8 同时也说明，一个函数不连续的充要条件是存在着一个开集，它的逆象不是开集。

例 10.1 设函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由下式定义

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{当 } x\leqslant 3 \\ \frac{1}{2}(x+5) & \text{当 } x>3 \end{cases}$$



其图象如附图所示。开集 (1, 3) 的逆象是 (2, 3]，这个逆象不是开集，所以 f 不连续。

下面叙述连续函数的一个重要性质，后面的章节将引用它。

定理 4.9 设 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在一个闭区间 $[a, b]$ 上连续，则此函数取得 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值。

换句话说，若 y_0 是一个实数，满足 $f(a)\leqslant y_0\leqslant f(b)$ 或 $f(b)\leqslant y_0\leqslant f(a)$，则有 $x_0\in\mathbf{R}$ 存在，使得 $a\leqslant x_0\leqslant b$ 且 $f(x_0)=y_0$。

这定理称为 **Weierstrass 介值定理。**

注意 一个函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 若在 $\mathbf{R}$ 的一个子集 D 上的每点连续，则称它在 D 上连续。

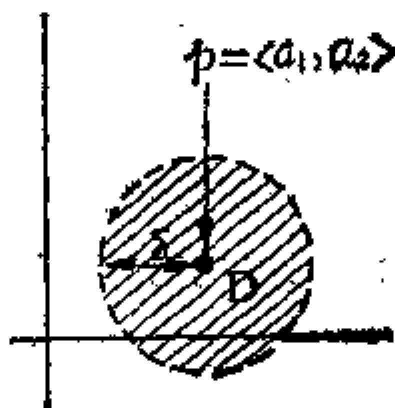
平面的拓扑（Topology of the plane）

平面 $\mathbf{R}^2$ 上一个圆内部所有的点所构成的集 D 称为一个**开盘**(open disc)。例如以 $p=\langle a_1, a_2\rangle$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的开盘就是：

$$\begin{aligned} D&=\{\langle x, y\rangle: (x-a_1)^2+(y-a_2)^2<\delta^2\} \\ &=\{q\in\mathbf{R}^2: d(p, q)<\delta\}, \end{aligned}$$

其中 $d(p, q)=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}$ 表示 $p=\langle a_1, a_2\rangle$ 与 $q=\langle x, y\rangle$ 的距离。

开盘在 $\mathbf{R}^2$ 的拓扑中所起的作用与开区间在直线 $\mathbf{R}$ 的拓扑中所起的作用相似。

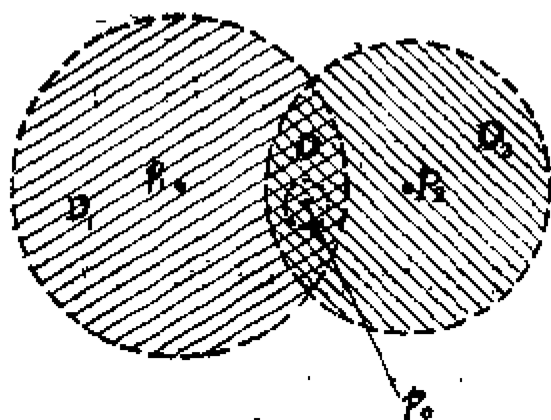


设 A 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集，则当一点 $p\in A$ 能属于某一个开盘 D_p 而这开盘又含在 A 中时，就称 p 为 A 的一个**内点**(Interior point)：

$$p\in D_p\subset A_{\circ}$$

若 A 的每一点都是内点，则称 A **为开的**(open)或称为 **$\mathscr{U}$—开的**($\mathscr{U}$-open)。

例 11.1 显然，一个开盘或整个平面 $\mathbf{R}^2$ 或空集 $\varnothing$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 的开子集。现在我们来证明：两个开盘的交，例如 $D_1=\{q\in\mathbf{R}^2: d(p_1,q)<\delta_1\}$ 与 $D_2=\{q\in\mathbf{R}^2: d(p_2,q)<\delta_2\}$ 的交，也是开集(见下图)。



设 $p_0\in D_1\cap D_2$，则 $d(p_1,p_0)<\delta_1$ 及 $d(p_2,p_0)<\delta_2$。

令 $r=\min\{\delta_1-d(p_1,p_0),\delta_2-d(p_2,p_0)\}>0$，

又令 $D=\{q\in\mathbf{R}^2: d(p_0,q)<\frac{1}{2}r\}$，

则 $p_0\in D\subset D_1\cup D_2$。就是说 p_0 是 $D_1\cap D_2$ 的一个内点。

设 A 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集，又设 $p\in\mathbf{R}^2$。若含 p 的任何开集

G亦必含A的一个异于p的点，即：

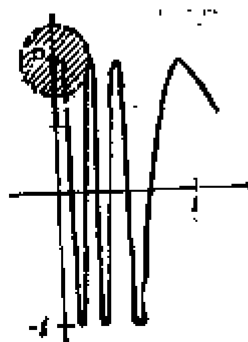
$$\text{开集 } G\subset\mathbf{R}^2,\ p\in G\Longrightarrow A\cap(G\setminus\{p\})\neq\varnothing,$$

则p称为A的一个**聚点**(accumulation point)，或称为A的一个**极限点**(limit point)。

例 11.2 考察$\mathbf{R}^2$的子集：

$$A=\left\{\langle x,\ y\rangle:\ y=\sin\frac{1}{x},\ x>0\right\}$$

集A的图象如附图所示。若从右向左考察曲线，则见波动越来越快。即曲线与x轴的交点互相越来越靠近。点$p=\left\langle 0,\ \frac{1}{2}\right\rangle$是$A$的一个极限点，因为$A$必将通过含$p$的任何一个开盘。实际上，$y$轴上由$-1$到$1$之间的所有的点，亦即下面的集$B$：



$$B=\{\langle x,\ y\rangle:\ x=0,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$$

中的每一点都是A的聚点。

$\mathbf{R}^2$的一个子集A称为**闭的**(closed)，是指它的余集A^c是$\mathbf{R}^2$的一个开子集。

设已给$\mathbf{R}^2$的一个点列$\langle p_1,\ p_2,\ \cdots\rangle$，若$\mathbf{R}^2$有一点$q$，使含$q$的任何开集都含有上述点列中几乎所有的项，则称此点列**收敛于**(converges to)点q。

$\mathbf{R}^2$中的收敛性可以用$\mathbf{R}$中的收敛性来描写：

命题 4.10 考察$\mathbf{R}^2$的点列$\langle p_1=\langle a_1,\ b_1\rangle,\ p_2=\langle a_2,\ b_2\rangle,\cdots\rangle$及点$q=\langle a,\ b\rangle\in\mathbf{R}^2$，则

$$p_n\to q\ \text{当且仅当}\ a_n\to a\ \text{同时}\ b_n\to b。$$

一个函数$f:\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$称为在一点$p\in\mathbf{R}^2$**连续**(continuous)，是指：对于含$f(p)$的任何开集$V_{f(p)}$，存在着一个

含 p 的开集 U_p，使 $f(U_p)\subset V_{f(p)}$。

下面罗列几个关于 $\mathbf{R}^2$ 的定理，它和以前叙述过的关于 $\mathbf{R}$ 的几个定理是类似的。

定理 4.1* $\mathbf{R}^2$ 的任意多个开集之并也是开集。

定理 4.2* $\mathbf{R}^2$ 的有限个开集的交也是开集。

定理 4.4* $\mathbf{R}^2$ 的子集 A 是闭的充要条件是 A 含有它自己的每一个聚点。

定理 4.8* 函数 f: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 连续的充要条件是任何开集的逆象也是开集。

习 题 解 答

开集，聚点

1．求以下各实数集的所有聚点：

(i) $\mathbf{N}$； (ii) $(a, b]$； (iii) $\mathbf{Q}^c$，即无理数集。

解：(i) 正整数集 $\mathbf{N}$ 没有聚点。因为若 a 是任一实数，可找到一个充分小的 $\delta>0$ 使开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 不含 $\mathbf{N}$ 中与 a 不同的点。

(ii) $[a, b]$ 的任何一点都是 $(a, b]$ 的聚点；因为每个含 $p\in[a, b]$ 的开区间都含有 $(a, b]$ 中与 p 不同的点。

(iii) $\mathbf{R}$ 中的每个实数 p 都是 $\mathbf{Q}^c$ 的极限点，因为每个含 $p\in\mathbf{R}$ 的开区间都包含 $\mathbf{Q}^c$ 的点，即与 p 不同的无理数。

2．我们知道 A' 表示集 A 的导集，也就是 A 的聚点集。试求这样的集 A：

(i) 使 A 与 A' 互斥； (ii) A 是 A' 的真子集； (iii) A' 是 A 的真子集； (iv) $A=A'$。

解：例如：(i) 集 $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ 只有 0 是它的聚点。因此 $A'=\{0\}$，且 A 与 A' 互斥。

(ii) 设 $A=(a, b]$ 为一个左开右闭区间。正如上题中所看到的 $A'=[a, b]$ 是一个闭区间，故 $A\subset A'$。

(iii) 设 $A=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots\right\}$，则 0 是 A 的唯一极限点，并且它也属于 A。因此 $A'=\{0\}$ 并且 $A'\subset A$。

(iv) 设 $A=[a, b]$ 为闭区间。则 A 中的每一点都是 A 的极限点，并且 A 也只有这些极限点，因此 $A=A'=[a, b]$。

3．求证定理 4.1*：$\mathbf{R}^2$ 中任意多个开集的并是开集。

解：设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集组。令 $H=\bigcup\{G:G\in\mathscr{A}\}$，令 $p\in H$。只要证明 p 是 H 的一个内点，即有一个开盘 D_p 存在，使 $p\in D_p\subset H$，则定理便得到证明。

因 $p\in H=\bigcup\{G:G\in\mathscr{A}\}$，故有 $G_0\in\mathscr{A}$ 使 $p\in G_0$。但因 G_0 是开集，故有含 p 的开盘 D_p 使 $p\in D_p\subset G_0$。而 G_0 是 $H=\bigcup\{G: G\in\mathscr{A}\}$ 的一个子集，故 D_p 也是 H 的一个子集。因此 H 是开的。

4．求证 $\mathbf{R}^2$ 中每个开集 G 都是一些开盘的并。

解：因 G 是开集，故对每点 $p\in G$，有开盘 D_p 存在，使得

$$p\in D_p\subset G,$$

所以有

$$G=\bigcup\{D_p: p\in G\}。$$

5．求证定理 4.2*：$\mathbf{R}^2$ 中有限个开集之交是开集。

解：我们将证 $\mathbf{R}^2$ 中两个开集之交是开集，然后由归纳法便可得一般的结论。

设 G 与 H 均为 $\mathbf{R}^2$ 中的开集，又设 $p\in G\cap H$，故 $p\in G$ 和 $p\in H$，则有开盘 D_1 与 D_2 存在，使

$$p\in D_1\subset G \quad 及 \quad p\in D_2\subset H,$$

于是

$$p\in D_1\cap D_2\subset G\cap H。$$

而由例 11.1，两个开盘的交是开集，故有开盘 D，使

$$p\in D\subset D_1\cap D_2\subset G\cap H,$$

这说明 p 是 $G\cap H$ 的内点。因此 $G\cap H$ 是开集。

6. 求证：设 $p\in G$，G 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开子集，则有以 p 为中心的开盘 D，使 $p\in D\subset G$。

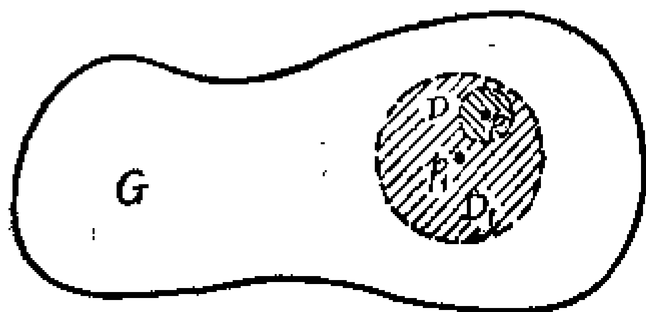
解：按内点的定义，有以 p_1 为中心，以 δ 为半径的开盘 $D_1=\{q\in\mathbf{R}^2: d(p_1, q)<\delta\}$ 使 $p\in D_1\subset G$。于是有

$$d(p_1, p)<\delta,$$

令

$$r=\delta-p(p_1, p)>0$$

又令 $D=\left\{q\in\mathbf{R}^2: p(p, q)>\frac{1}{2}r\right\}$，则如图所示，$p\in D\subset D_1\subset G$，其中 D 是以 p 为中心的开盘。

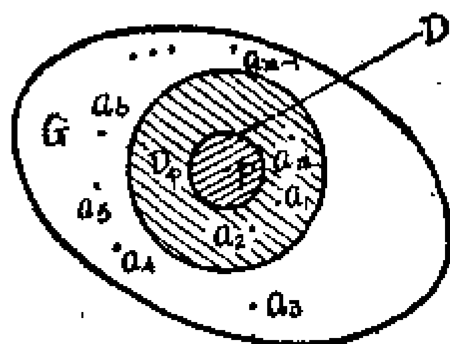


7. 求证：设 p 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集 A 的一个聚点，则含 p 的任何开集必含 A 中无限多个点。

解：设 G 是一个含 p 的开集，它只含 A 中的有限个异于 p 的点 $a_1, a_2, \cdots, a_m$；则由前一习题知：有一个以 p 为中

心，以 δ 为半径的开盘 D_p 含在 G 内，即：

$$p\in D_p\subset G。$$



取 $r>0$，而小于 δ，也小于 p 到 a_1，…，a_m 中任何一点的距离。令

$$D=\left\{q\in\mathbf{R}^2:\ d(p,q)<\frac{r}{2}\right\}$$

则 D 只含 p 而不含 a_1，…，a_m；并且因为 $D\subset D_p\subset G$，所以 D 也不含 A 中异于 p 的点。而这和 p 是 A 的聚点这个假设是互相矛盾的。因此，任何含 p 点的开集都必含 A 的无限多个点。

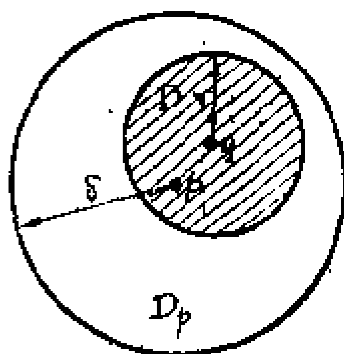
8．考察任何一个开盘 $D_p\subset\mathbf{R}^2$，其中心为 p，其半径为 δ。求证：有开盘 D 存在，使：(i) 其中心坐标是有理数；(ii) D 的半径是有理数；(iii) $p\in D\subset D_p$。

解：设 $p=(a,\ b)$，则有有理数 c 与 d 使得

$$a<c<a+\frac{1}{b}\delta$$

与

$$b<d<b+\frac{1}{b}\delta。$$



令 $q=\langle c,d\rangle$，则 $d(p,q)<\frac{1}{3}\delta$。

现选一个有理数 r，使得

$$\frac{1}{3}\delta<r<\frac{2}{3}\delta;$$

并令 D 为以 q 为中心，以 r 为半径的开盘，则因 q 点的坐标及半径 r 均为有理数，故 D 即为所求，如图所示。

9．求证：$\mathbf{R}^2$ 中的任何开集 G 都可表示为可数个开盘的并。

解：因 G 是开集，故对每点 $p\in G$，有以 p 为中心的开盘 D_p 存在，使 $p\in D_p\subset G$，但由上一习题可知对于每个这样的开盘 D_p，可以找到另一个开盘 E_p 具备以下性质：(i) E_p 的中心坐标是有理数；(ii) E_p 的半径长是有理数；(iii) $p\in E_p\subset D_p$ 从而 $p\in E_p\subset D_p\subset G$。

因此 $$G=\bigcup\{E_p;\ p\in G\}。$$

但中心坐标是有理数，半径长又是有理数的开盘的全体是可数的，于是命题得证。

10．求证：Bolzano-Weierstrass 定理：有界的无限实数集至少有一个聚点。

解：因为 A 有界，故 A 是某个闭区间 $I_1=[a_1, b_1]$ 的子集。在 $\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 处平分 I_1，得到 I_1 的两个闭子区间

$$\left[a_1,\ \frac{1}{2}(a_1+b_1)\right] \text{ 及 } \left[\frac{1}{2}(a_1+b_1),\ b_1\right]。\qquad (1)$$

因为 A 是无限集，所以它们不可能都只含 A 中有限个点。设 $I_2=[a_2, b_2]$ 是(1)中含 A 中无限个点的一个于区间。

再平分 I_2，象上面一样两个闭区间

$$\left[a_2,\ \frac{1}{2}(a_2+b_2)\right] \text{ 及 } \left[\frac{1}{2}(a_2+b_2),\ b_2\right]$$

当中至少有一个含 A 中无限个点，记这样的一个区间为 I_3。

继续这个过程，我们得到闭区间套序列

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$$

使得每个区间 I_n 都含 A 中无限个点并且

$$\lim|I_n|=0$$

其中 $|I_n|$ 表示区间 I_n 的长度。

由实数的区间套性质（见附录 A），存在一点 p 属于每

个区间 I_n。现在我们来证明 p 是 A 的聚点，从而也就使定理得到证明。

设 $S_p=(a, b)$ 是含 p 的一个开区间。因为 $\lim|I_n|=0$，故

$$\exists n_0\in \mathbf{N}\ \text{s.t.}\ |I_{n_0}|<\min(p-a, b-p)$$

于是象下图所示的那样，区间 I_{n_0} 是开区间 $S_p=(a, b)$ 的一个子集。



因为 I_{n_0} 含 A 中无限个点，所以开区间 S_p 也含 A 中无限个点。这就说明每个含 p 的开区间必含 A 中异于 p 的点，即 p 是 A 的聚点。

闭集

11．求证：集 F 是开的充要条件是它的余集 F^c 是闭集*。

解：因为 $(F^c)^c=F$，故 F 是 F^c 的余集。于是由定义，F^c 为闭的充要条件是 F 为开。

12．求证有限个闭集之并是闭集。

解：设 $F_1, \cdots, F_m$ 为闭集，令 $F=F_1\cup\cdots\cup F_m$，则由 De Morgan 律得

$$F^c=(F_1\cup\cdots\cup F_m)^c=F_1^c\cap\cdots\cap F_m^c。$$

因此 F^c 是有限个开集 F_i^c 的交，从而 F^c 是开的。于是它的余集 $F^{cc}=F$ 是闭的。

---

* 译注：本题原文为"求证：集 F 是闭的充要条件是它的余集 F^c 是开集"。但按本书的叙述（见本章"平面的拓扑"一节）这个命题是作为定义使用的，故将此题目改变成这样。

13. 求证：任意多个闭集之交是闭集。

解：设 $\{F_i\}$ 为闭集组。令 $F=\bigcap_i F_i$。则由 De Morgan 律得 $F^c=(\bigcap_i F_i)^c=\bigcup_i F_i^c$。即$F^c$是一组开集的并，因此它是开集，从而 $F^{cc}=F$ 是闭的。

14. 求证定理 4.4*：$\mathbf{R}^2$ 的一个子集是闭集的充要条件是它含有它所有的聚点。

解：设 p 是闭集F的一个聚点，则任何含 p 的开盘都含 F 的异于 p 的点。故任何含 p 的开盘都不能全部含在F的余集之中。换句话说，p 不是 F^c 的内点。但因 F 是闭的，故 F^c 是开集，所以 p 不属于 F^c，亦即 $p\in F$。

另一方面，设集A含有它所有的聚点，现在来证明它是闭集，亦即要证明它的余集 A^c 是开集。令 $p\in A^c$，则因 A 含有它所有的聚点，故p不是A的聚点。于是至少有一个含 p 点的开盘 D_p 存在，使它不含A的点，也就是说 $D_p\subset A^c$。这说明 p 是 A^c 的一个内点。由于每一点 $p\in A^c$ 是一个内点，所以 A^c 是开的，从而A是闭的。

15. 求证：$\mathbf{R}^2$ 中任何一集A的导集 A' 都是闭集。

解：设 p 是 A' 的一个聚点。根据定理 4.4*，如果能证 $p\in A'$，亦即 p 也是A的一个聚点，则定理得证。

设 G_p 为含 p 的一个开集，因 p 是 A' 的聚点，故 G_p 必含有异于 p 的点 $q\in A'$。但G_p是开集，它含 $q\in A'$ 故必含 A 中的（无限多个）点，于是

$$\exists\, a\in A \text{ 使得 } a\neq p,\ a\neq q \text{ 而 } a\in G_p。$$

这说明任取含 p 的开集 G_p，它必含有A中异于 p 的点，从而得 $p\in A'$。

16. 求证：设 A 为闭的有界实数集，并设 $\sup(A)=p$，

则 $p\in A$。

解：设 $p\notin A$。令 G 为含 p 的一个开集，则 G 含一个开区间 (b, c) 使这开区间含 p，即：使得 $b<p<c$。现在 $\sup(A)=p$，而 $p\notin A$，故

$$\exists a\in A \quad 使得 \quad b<a<p<c$$

（因为，否则 b 就将是 A 的一个上界了），就是说 $a\in(b, c)\subset G$。这说明含 p 的任何开集都含有 A 中异于 p 的点，从而 p 是 A 的聚点，但 A 是闭的，因此，由定理 4.4* 得 $p\in A$。

17．求证定理 4.5 (Heine-Borel)：设 $I_1=[c_1, d_1]$ 被开区间组 $\mathscr{G}=\{(a_i, b_i): i\in I\}$ 所复盖，则 $\mathscr{G}$ 必含有复盖 I_1 的有限子组。

解：假设 $\mathscr{G}$ 没有可以复盖 I_1 的有限子组。则在 $\frac{1}{2}(c_1+d_1)$ 处平分 I_1，并考察下列两个闭区间

$$\left[c_1, \frac{1}{2}(c_1+d_1)\right] 及 \left[\frac{1}{2}(c_1+d_1), d_1\right], \tag{1}$$

这两个区间中至少有一个是不能用 $\mathscr{G}$ 的有限子组来复盖的，否则整个区间 I_1 就能用 $\mathscr{G}$ 的有限子组来复盖了。设 $I_2=[c_2, d_2]$ 是(1)中不能用 $\mathscr{G}$ 的有限子组来复盖的一个区间。

现在平分 I_2。同上面一样，两个闭区间

$$\left[c_2, \frac{1}{2}(c_2+d_2)\right] 及 \left[\frac{1}{2}(c_2+d_2), d_2\right]$$

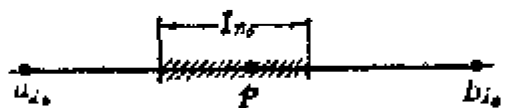
中至少有一个不能用 $\mathscr{G}$ 的有限子组来复盖。取一个这样的区间并称它为 I_3。

继续这一过程，便得到一个闭区间套序列 $I_1\supset I_2\supset I_3\cdots$ 使得每个区间 I_n 不能用 $\mathscr{G}$ 的有限子组来复盖，并且 $\lim|I_n|=0$，其中 $|I_n|$ 表示区间 I_n 的长度。

由实数的区间套性质（见附录），存在着一点 p，它属于每个区间 I_n。特别地，$p\in I_1$。因为$\mathscr{G}$是 I_1 的一个复盖，故在 $\mathscr{G}$ 内有一个开区间 (a_{i_0}, b_{i_0}) 存在，它包含 p。因此 $a_{i_0}<p<b_{i_0}$。由于 $\lim|I_m|=0$，故

$$\exists n_0\in \mathbf{N} \text{ s.t. } |I_{n_0}|<\min(p-a_{i_0}, b_{i_0}-p),$$

于是如下图所示，区间 I_{n_0} 是$\mathscr{G}$中某个区间 (a_{i_0}, b_{i_0}) 的一个子集。



但这与 I_{n_0} 的取法相矛盾。因此原来关于$\mathscr{G}$没有可以复盖 I_1 的有限子组的假设是错误的。从而定理成立。

序列

18．写出下列序列的最初六项：

(i) $S(n)=\begin{cases} n-1 & \text{若 } n \text{ 是奇数} \\ n^2 & \text{若 } n \text{ 是偶数} \end{cases}$

(ii) $t(n)=\begin{cases} 1 & \text{若 } n=1 \\ 2 & \text{若 } n=2 \\ t(n-1)+t(n-2) & \text{若 } n>2 \end{cases}$

解：(i) 这个函数用两个公式来确定。将 1，3，5 代入 $S(n)=n-1$ 得 $S_1=0$，$S_3=2$，$S_5=4$。然后将 2，4，6 代入 $S(n)=n^2$ 得 $S_2=4$，$S_4=16$，$S_6=36$ 因此得 $\{0, 4, 2, 16, 4, 36, \cdots\}$。

(ii) 在这里函数是递归定义的。第二项以后的每一项是由它前面二项相加而得的。于是：

$t_1=1$ $\qquad$ $t_2=2$

$t_3=t_2+t_1=2+1=3$ $\qquad$ $t_4=t_3+t_2=3+2=5$

$t_5=t_4+t_3=5+3=8 \qquad t_6=t_5+t_4=8+5=13$

因此得 $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots\}$。

19. 已给序列 $\langle a_n=(-1)^{n-1}(2n-1)\rangle$：

$\langle 1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, \cdots\rangle$

问：下列序列是否 $\langle a_n\rangle$ 的子列。

(i) $\langle b_n\rangle=\langle 1, 5, -3, -7, 9, 13, -11, -15, \cdots\rangle$。

(ii) $\langle c_n\rangle=\langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots\rangle$。

(iii) $\langle d_n\rangle=\langle -3, -7, -11, -15, -19, -23, \cdots\rangle$。

解：(i) 注意在 $\langle b_n\rangle$ 中 5 出现在 -3 之前，但在 $\langle a_n\rangle$ 中 -3 出现在 5 之前。因而 $\langle b_n\rangle$ 不是 $\langle a_n\rangle$ 的子列。

(ii) 在 $\langle a_n\rangle$ 中 3, 7, 11 诸项不出现；因而 $\langle c_n\rangle$ 不是 $\langle a_n\rangle$ 的子列。

(iii) $\langle d_n\rangle$ 是 $\langle a_n\rangle$ 的子列，因为 $\langle i_n=2n\rangle=\langle 2, 4, 6, \cdots\rangle$ 是正整数序列使得 $i_1<i_2<i_3<\cdots$；因此

$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots\rangle=\langle a_2, a_4, a_6, \cdots\rangle=\langle -3, -7, -11, \cdots\rangle$

是 $\langle a_n\rangle$ 的一个子列。

20. 求下列序列的值域：

(i) $\left\langle 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \cdots\right\rangle$。

(ii) $\langle 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \cdots\rangle$。

(iii) $\langle 2, 4, 6, 8, 10, \cdots\rangle$。

解：序列的值域就是象点构成的集。因而序列的值域就是：

(i) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$； (ii) $\{1, 0, -1\}$；

(iii) $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$。

21．求证：若序列 $\langle a_n\rangle$ 的值域是有限集，则此序列必含收敛的子列。

解：若 $\langle a_n\rangle$ 的值域 $\{a_n\}$ 是有限集，则象点之一比方说 b 在序列里出现无限次。因此 $\langle b, b, b, b, \cdots\rangle$ 是 $\langle a_n\rangle$ 的一个子列并且它是收敛的。

22．求证：若 $\lim a_n=b$ 同时 $\lim a_n=c$，则 $b=c$。

解：假设 b 与 c 不同。令 $\delta=|b-c|>0$。则含 b 的开区间 $B=\left(b-\frac{1}{2}\delta,\ b+\frac{1}{2}\delta\right)$ 与含 c 的开区间 $c=\left(c-\frac{1}{2}\delta,\ c+\frac{1}{2}\delta\right)$ 是互斥的。因 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 b，故 B 必含序列中除去有限项以外的所有的项。因此 c 只能含有此序列的有限多项。但这与 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 c 发生矛盾。所以，b 与 c 是相同的。

23．求证：若序列 $\langle a_n\rangle$ 的值域 $\{a_n\}$ 含一个聚点 b，则这序列 $\langle a_n\rangle$ 含一个收敛于 b 的子列 $\langle a_{in}\rangle$。

解：因为 b 是 $\langle a_n\rangle$ 的聚点，下列的每个开区间

$$S_1=(b-1,\ b+1),\qquad S_2=\left(b-\frac{1}{2},\ b+\frac{1}{2}\right),$$

$$S_3=\left(b-\frac{1}{3},\ b+\frac{1}{3}\right),\ \cdots$$

都含集 $\{a_n\}$ 的无限多个元素，因而含序列 $\langle a_n\rangle$ 的无限多项。现在选择一个序列 $\{a_{in}\}$ 如下：

在 S_1 内取一点 a_{i_1}，在 S_2 内取一点 a_{i_2}，使得 $i_1>i_2$，也就是说使得在序列 $\langle a_n\rangle$ 中 a_{i_2} 出现在 a_{i_1} 之后；

在 S_3 内取一点 a_{i_3}，使得 $i_3>i_2$。

用同样方法继续取下去。

注意：我们总是能够取得序列 $\langle a_{i_n}\rangle$ 内的下一项的，因为原始的序列在每个区间 S_n 内都有无限多项。

现在来证明 $\langle a_{i_n}\rangle$ 满足定理的条件。以上我们所取序列 $\langle a_{i_n}\rangle$ 中的各项满足 $i_1<i_2<i_3<\cdots$；因此 $\langle a_{i_n}\rangle$ 是 $\langle a_n\rangle$ 的一个子列。需要证明的是 $\lim a_{i_n}=b$。设 G 是含 b 的一个开集，则 G 包含一个含 b 的开区间 (d_1, d_2)，而且 $d_1<b<d_2$。设 $\delta=\min(b-d_1, d_2-b)>0$；则

$$\exists\, n_0\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ \frac{1}{n_0}<\delta,$$

故 $S_{n_0}\subset(d_1, d_2)\subset G$。而这说明

$$n>n_0\ \text{导致}\quad a_{i_n}\in S_n\subset S_{n_0}\subset(d_1, d_2)\subset G。$$

因此 G 含数列 $\langle a_{i_n}\rangle$ 的几乎所有的项；就是说 $\lim a_{i_n}=b$。

24. 求证定理4.6：每个有界的实数列必含收敛的子列。

解：考察序列 $\langle a_n\rangle$ 的值域 $\{a_n\}$。若 $\{a_n\}$ 是有限集，则由习题21知 $\langle a_n\rangle$ 必含收敛的子列。反之，若 $\{a_n\}$ 是无限集，由 Bolzano-Weierstrass 定理，有界的无限集 $\{a_n\}$ 必有一个聚点。由此根据上题可知，这时序列也含收敛的子列。

25. 求证：每个 Cauchy 实数列 $\langle a_n\rangle$ 必有界。

解：令 $\varepsilon=1$，则由 Cauchy 序列的定义，

$$\exists\, n_0\in\mathbf{N}\ \text{使得}\ n, m\geqslant n_0\Longrightarrow|a_n-a_m|<1。$$

特别地，当 $m\geqslant n_0$ 时 $\Longrightarrow|a_{n_0}-a_m|<1$，或 $a_{n_0}-1<a_m<a_{n_0}+1$。

设
$$\alpha=\max(a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, a_{n_0}+1)$$
$$\beta=\min(a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, a_{n_0}-1),$$

则 α 和 β 分别是序列 $\langle a_n\rangle$ 的值域 $\{a_n\}$ 的上界和下界。从

而，$\langle a_n\rangle$ 是一个有界序列。

26．求证：设 $\langle a_n\rangle$ 为 Cauchy 序列，若 $\langle a_n\rangle$ 有子列 $\langle a_{i_n}\rangle$ 收敛于 b，则 $\langle a_n\rangle$ 本身也收敛于 b。

解：设 $\varepsilon>0$，我们要找一个正整数 n_0 使得

$$n>n_0 \Longrightarrow |a_n-b|<\varepsilon。$$

因为 $\langle a_n\rangle$ 是一个 Cauchy 序列，故

$$\exists\, n_0\in \mathbf{N} \text{ 使得 } n,\ m>n_0 \Longrightarrow |a_n-a_m|<\frac{1}{2}\varepsilon。$$

还有，因为子列 $\langle a_{i_n}\rangle$ 收敛于 b，故

$$\exists\, i_m\in \mathbf{N} \text{ 使得 } |a_{i_m}-b|<\frac{1}{2}\varepsilon。$$

注意：可以取 i_m 使得 $i_m>n_0$，从而

$$n>n_0 \Longrightarrow |a_n-b|=|a_n-a_{i_m}+a_{i_m}-b|$$
$$\leqslant |a_n-a_{i_m}|+|a_{i_m}-b|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon,$$

因此 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 b。

上面我们要求 $i_m>n_0$ 是为了得到：$n>n_0 \Longrightarrow |a_n-a_{i_m}|<\frac{1}{2}\varepsilon$。

27．求证定理 4.7 (Cauchy)：每个 Cauchy 实数列必收敛于一个实数。

解：由习题25，Cauchy 序列 $\langle a_n\rangle$ 有界。因此，由定理4.6，有界序列 $\langle a_n\rangle$ 含一个收敛子列 $\langle a_{i_n}\rangle$。但是，由上题，Cauchy 序列 $\langle a_n\rangle$ 跟它的子列 $\langle a_{i_n}\rangle$ 收敛于同一极限。换句话说，Cauchy 序列收敛于一个实数。

28．问：下列 $\mathbf{R}$ 的子集是否完备：

(i) 正整数集 $\mathbf{N}$；　(ii) 无理数集 $\mathbf{Q}^c$。

解：(i) 设 $\langle a_n \rangle$ 是一个正整数的 Cauchy 序列。若 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则

$$|a_n-a_m|<\varepsilon=\frac{1}{2} \Longrightarrow a_n=a_m。$$

所以，Cauchy 序列 $\langle a_n \rangle$ 具有形式 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, b, \cdots \rangle$，它收敛于正整数 b。因此 $\mathbf{N}$ 是完备的。

(ii) 注意下列每个开区间

$$(-1, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \cdots$$

都含无理点。因此存在一个无理数列 $\langle a_n \rangle$ 使得 $a_n \in$ 开区间 $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$。序列 $\langle a_n \rangle$ 是 $\mathbf{Q}^c$ 内点的 Cauchy 序列，并且它收敛于有理数 0。因此 $\mathbf{Q}^c$ 是不完备的。

连续

29．求证：若函数 f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 取常值，例如 $f(x)=a$ 对于每个 $x \in \mathbf{R}$ 成立，则 f 是连续函数。

解：方法 1 f 连续的充要条件是任何开集 G 的逆象 $f^{-1}[G]$ 也是开集。

因为 $f(x)=a$ 对于每个 $x \in \mathbf{R}$ 成立，所以

$$f^{-1}[G]=\begin{cases} \varnothing & 若\ a \notin G \\ \mathbf{R} & 若\ a \in G \end{cases}$$

对于任何开集 G 成立。因为 $\mathbf{R}$ 和 $\varnothing$ 都是开集，所以在每种情况下，$f^{-1}[G]$ 都是开集。

方法 2 利用连续性的 ε-δ 定义证明 f 在任意点 x_0 是连续的。

设 $\varepsilon>0$，则对于任何 $\delta>0$，例如 $\delta=1$，得

$$|x-x_0|<1 \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|=|a-a|=0<\varepsilon,$$

因此 f 连续。

30．求证：恒等函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$（即由 $f(x)=x$ 所定义的函数）是连续函数。

解：方法 1　设 G 为任一开集，则 $f^{-1}[G]=G$ 也是开集。从而 f 是连续函数。

方法 2　利用连续性的 ε-δ 定义来证明 f 在任意点 x_0 连续。

设 $\varepsilon>0$，则取 $\varepsilon=\delta$ 时，得

$$|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon,$$

从而，f 连续。

31．求证：设函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 均为连续，则它们的复合 $g\circ f$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 也是连续的。

解：需要证明任何开集 G 的逆象 $(g\circ f)^{-1}[G]$ 也是开集。因 g 连续，故 G 的逆象 $g^{-1}[G]$ 是开集。但因 f 连续，故 $g^{-1}[G]$ 的逆象 $f^{-1}[g^{-1}[G]]$ 也是开集。

我们知道 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$，

因此　$(g\circ f)^{-1}[G]=(f^{-1}\circ g^{-1})[G]=f^{-1}[g^{-1}[G]]$

是一个开集。因此复合函数 $g\circ f$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的。

32．求证：设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续，同时对于每个有理数 $q\in\mathbf{Q}$ 有 $f(q)=0$，则对于任何实数 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)=0$。

解：假设 $f(p)$ 对于某个实数 $p\in\mathbf{R}$ 不等于零，即假设

$$\exists p\in\mathbf{R}\ 使得\ f(p)=\gamma,\ |\gamma|>0。$$

则取 $\varepsilon=\frac{1}{2}|\gamma|$。因 f 连续，故

$\exists\delta>0$ 使得 $|x-p|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(p)|<\varepsilon=\frac{1}{2}|\gamma|$

而在每个开区间内都有有理点，特别地，

$$\exists q\in\mathbf{Q} \text{ 使得 } q\in\{x: |x-p|<\delta\}。$$

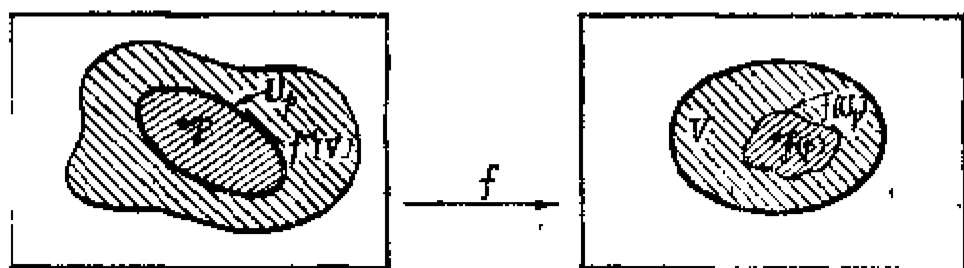
由此可得　$|f(q)-f(p)|=|f(p)|=|\gamma|<\varepsilon=\frac{1}{2}|\gamma|$，

但这是不可能的。因此对于每个 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=0。$$

33．求证定理4.8：函数 f：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 连续的充要条件是开集的逆象是开集。

解：设 f：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为连续，又设 V 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开子集。我们要证 $f^{-1}[V]$ 也是一个开集。设 $p\in f^{-1}[V]$，则 $f(p)\in V$。由连续性定义，存在一个含 p 的开集 U_p，使得 $f[U_p]\subset V$。因而（如下图所示）



$$U_p\subset f^{-1}[f[U_p]]\subset f^{-1}[V]。$$

我们已证得，对于点 $p\in f^{-1}[V]$，存在一个开集 U_p 使得

$$p\in U_p\subset f^{-1}[V]。$$

从而，　　$f^{-1}[V]=\bigcup\{U_p: p\in f^{-1}[V]\}$，

因此 $f^{-1}[V]$ 是开集的并，所以它本身是开集。

另一方面，假定每个开集的逆象是开集。我们要证 f 在任意点 $p\in\mathbf{R}$ 是连续的。设 V 是含 $f(p)$ 的开集，即 $f(p)\in V$。则 $f^{-1}[V]$ 是满足性质 $f[f^{-1}[V]]\subset V$ 的含 p 的开

集。因此 f 在 p 点连续。

34．给出这样的例子：两个函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{R}$ 的每一点都不连续，但 $f+g$ 在$\mathbf{R}$的每一点都连续。

解：考察定义为

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } x \text{ 是有理数}\\ 1 & \text{若 } x \text{ 是无理数,}\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } x \text{ 是有理数}\\ 0 & \text{若 } x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

的两个函数 f 与 g。则函数 f 与 g 在 $\mathbf{R}$ 的每点都不连续，但是它们的和 $f+g$ 是一个常值函数：$(f+g)(x)=1$，因此是一个连续函数。

35．求证：设函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在点 $p\in\mathbf{R}$ 连续，则

(i) 若 $f(p)$ 是正的，即若 $f(p)>0$，则有含 p 的开区间 S 存在，使 f 在 S 的每点取正值。

(ii) 若 $f(p)$ 是负的，即若 $f(p)<0$，则有含 p 的开区间 S 存在，使 f 在 S 的每点取负值。

解：我们只证(i)。因(ii)的证明与(i)类似故略去。

假设 $f(p)=\varepsilon>0$。因为 f 在 p 点连续，故

$$\exists\,\delta>0 \text{ 使得 } |x-p|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(p)|<\varepsilon$$

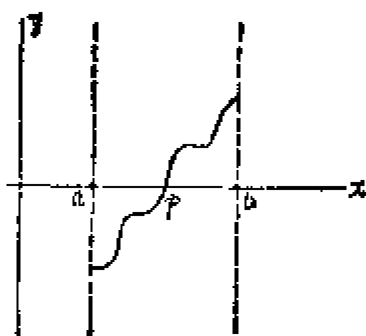
或等价地说，有：

$$x\in(p-\delta,\ p+\delta)\Longrightarrow f(x)\in(f(p)-\varepsilon,\ f(p)+\varepsilon)$$
$$=(0,\ 2\varepsilon)。$$

于是对于开区间 $(p-\delta,\ p+\delta)$ 内的每点 x，$f(x)$ 取正值。

36．求证：设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 的每点连续，又设 $f(a)<0<f(b)$。则有一点 $p\in[a,\ b]$ 存在，使 $f(p)=0$。（换句话说，定义在闭区间上的连续函数，如果它的图象包括位于 x 轴下方与上方两部分，则这图象一定与 x 轴至少有一个交点，如图所示。）

解：设 A 是 $[a, b]$ 内使 f 取得负值那些点构成的集，即



$A=\{x;\ x\in[a, b],\ f(x)<0\}$，

则 A 不空（例如 $a\in A$）。

设 $p=\sup(A)$ 是 A 的最小上界。因 $a\in A$，故 $a\leqslant p$；又因 b 是 A 的一个上界，故 $p\leqslant b$。因此 $p\in[a, b]$。

要证 $f(p)=0$。

若 $f(p)<0$，则由上题，有一个开区间 $(p-\delta, p+\delta)$ 使 f 在其中取负值，即

$$(p-\delta, p+\delta)\subset A。$$

因此 p 不可能是 A 的上界。

另一方面，若 $f(p)>0$，则存在一个区间 $(p-\delta, p+\delta)$ 使 f 在其中取正值，因此

$$(p-\delta, p+\delta)\cap A=\varnothing,$$

这说明 p 不可能是 A 的最小上界。于是 $f(p)$ 只能是 0，即 $f(p)=0$。

注意：在 $f(b)<0<f(a)$ 情况下定理也成立，证明是类似的。

37．求证定理 4.9 (Weierstrass)：设 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，则 f 取得 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值。

解：假设 $f(a)<f(b)$，又设 y_0 是一个实数，使 $f(a)<y_0<f(b)$。我们要证有一点 p，使 $f(p)=y_0$。为此，考察函数 $g(x)=f(x)-y_0$，它也是连续的。并且 $g(a)<0<g(b)$。

由上题，存在着一点 p，使得 $g(p)=f(p)-y_0=0$，因而 $f(p)=y_0$。

在 $f(b)<f(a)$ 的情况下证明是类似的。

补 充 习 题

开集，闭集，聚点

38．求证：若A是$\mathbf{R}$的一个有限子集，则A的导集A'是一个空集，即$A'=\varnothing$。

39．求证：$\mathbf{R}$的每一有限子集是闭的。

40．求证：若$A\subset B$，则$A'\subset B'$。

41．求证：$\mathbf{R}^2$的子集B是闭的，当且仅当$d(P, B)=0$导致$P\in B$，其中$d(P, B)=\inf\{d(P, q):q\in B\}$。

42．求证：对任一集A，$A\cup A'$是闭的。

43．求证：$A\cup A'$是包含A的最小闭集，即若F是闭的且$A\subset F\subset A\cup A'$，则$F=A\cup A'$。

44．求证：任一集A的内点的集合，记作$\mathrm{int}(A)$，是一个开集。

45．求证：A的内点集是包含在A中的最大开集，即若G是开的且$\mathrm{int}(A)\subset G\subset A$，则$\mathrm{int}(A)=G$。

46．求证：$\mathbf{R}$的既开又闭的子集只有$\varnothing$与$\mathbf{R}$。

序列

47．求证：若序列$\langle a_n\rangle$收敛于$b\in\mathbf{R}$，则序列$\langle|a_n-b|\rangle$收敛于零。

48．求证：若序列$\langle a_n\rangle$收敛于0，而序列$\langle b_n\rangle$有界，则序列$\langle a_nb_n\rangle$也收敛于0。

49．求证：若$a_n\to a$与$b_n\to b$，则序列$\langle a_n+b_n\rangle$收敛于$a+b$。

50．求证：若$a_n\to a$与$b_n\to b$，则序列$\langle a_nb_n\rangle$收敛于ab。

51．求证：若 $a_n\to a$ 与 $b_n\to b$，其中 $b_n\neq 0$ 与 $b\neq 0$，则序列 $\left\langle\frac{a_n}{b_n}\right\rangle$ 收敛于 $\frac{a}{b}$。

52．求证：若序列 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 b，则 $\langle a_n\rangle$ 的每一子序列 $\langle a_{i_n}\rangle$ 也收敛于 b。

53．求证：若序列 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 b，则或者序列 $\langle a_n\rangle$ 的值域 $\{a_n\}$ 是有限集或者 b 是值域 $\{a_n\}$ 的聚点。

54．求证：若不同元素的序列 $\langle a_n\rangle$ 是有界的而且 $\langle a_n\rangle$ 的值域 $\{a_n\}$ 恰好有一个极限点 b，则序列 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 b。（注：序列 $\left\langle 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots\right\rangle$ 说明定理中的有界性条件不能去掉）。

连续性

55．求证：函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在点 $a\in\mathbf{R}$ 是连续的，当且仅当对每一收敛于 a 的序列 $\langle a_n\rangle$，序列 $\langle f(a_n)\rangle$ 收敛于 $f(a)$。

56．求证：设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在 $p\in\mathbf{R}$ 连续，则存在一个包含 p 的开区间 S 使 f 在开区间 S 上是有界的。

57．试给出函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的一个例子，使 f 在开区间 $s=(0, 1)$ 内每一点为连续，但在开区间 s 上不是有界的。

58．求证：设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在闭区间 $A=[a, b]$ 的每一点是连续的，则 f 在 A 上是有界的。（注：根据前面的习题，如 A 不闭，这个定理不正确。）

59．求证：设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，则和 $(f+g)$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，其中 $f+g$ 由 $(f+g)(x)\equiv f(x)+$

$g(x)$ 所定义。

60．求证：设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，又设 k 是任一实数，则函数 (kf)：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，其中 kf 由 $(kf)(x)\equiv k(f(x))$ 所定义。

61．求证：设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，则 $\{x\in\mathbf{R}:\ f(x)=g(x)\}$ 是一个闭集。

62．求证：投影 π_x：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续的，其中 π_x 由 $\pi_x(\langle a, b\rangle)=a$ 所定义。

63．考虑由下式所定义的函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & 若\ x\neq0\\ 0 & 若\ x=0\end{cases},\qquad g(x)=\begin{cases}x\sin(1/x) & 若\ x\neq0\\ 0 & 若\ x=0\end{cases}$$

求证 g 在 0 点是连续的，但 f 在 0 点不连续。

64．已知每一个有理数 $q\in\mathbf{Q}$ 都可以唯一地写成形式 $q=\dfrac{a}{b}$ 其中 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{N}$，a 与 b 互质。考虑定义如下的函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases}0 & 若\ x\ 是无理数\\ 1/b & 若\ x\ 是有理数且如上所述\ x=a/b\end{cases}$$

求证：f 在每一无理点处连续，但在每一有理点处不连续。

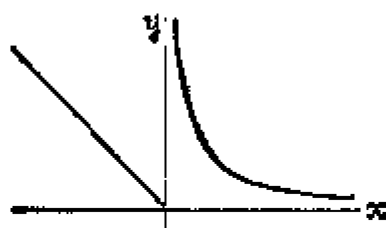
补充习题答案

57．考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}-x & 若\ x\leqslant0\\ 1/x & 若\ x>0\end{cases}$$

函数 f 在 $\mathbf{R}$ 中除 0 点外的每点处连续，如 f 在附图中所示

的。因而，f 在开区间 (0, 1) 中每一点为连续，但在 (0, 1) 不是有界的。



58. 提示：用习题 56 中所述的结果和 Heine-Borel 定理。

第五章　拓扑空间：诸定义

拓扑空间（Topological spaces）

设 X 为一非空集；τ 为 X 的一个子集组，若集组 τ 满足下列三条公理，则称它为 **X 上的一个拓扑** (a topology on X)。

$[O_1]$：X 与 $\varnothing$ 属于 τ。

$[O_2]$：τ 中任何多个集的并属于 τ。

$[O_3]$：τ 中任意两个集的交属于 τ。

这时，τ 中的元素称为 **τ-开集** (τ-open sets) 或简称**开集** (open sets)。X 连同 τ，即 (X, τ)，称为一个**拓扑空间** (topological space)。

例 1.1　设 $\mathscr{U}$ 表示第四章讨论过的所有开的实数集构成的组，则 $\mathscr{U}$ 是 **R** 上的一个拓扑，它称为 **R 上的通常拓扑** (usual topology)。类似地，$\mathbf{R}^2$ 平面上所有开集构成的集组 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个拓扑，也称为 **$\mathbf{R}^2$ 上的通常拓扑**。对于 **R** 与 $\mathbf{R}^2$，除非有特别的说明，我们总是用它们的通常拓扑。

例 1.2　考察 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 的下列子集组：

$$\tau_1=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

$$\tau_2=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

$$\tau_3=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$$

则 τ_1 是 X 上的一个拓扑；因为它满足必需的三条公理 $[O_1]$，$[O_2]$，$[O_3]$。τ_2 不是 X 上的拓扑，因为 τ_2 中两个元素

$\{a, c, d\}$ 与 $\{b, c, d\}$ 的并 $\{a, b, c, d\}$ 不属于 τ_2，即 τ_2 不满足公理 $[O_2]$。τ_3 也不是 X 上的拓扑，因为 τ_3 中两个元素 $\{a, c, d\}$ 与 $\{a, b, d, e\}$ 的交 $\{a, d\}$ 不属于 τ_3，即 τ_3 不满足公理 $[O_3]$。

例 1.3 设 $\mathscr{D}$ 表示 X 的一切子集所组成的集组，则 $\mathscr{D}$ 满足 X 上的拓扑的三条公理，所以 $\mathscr{D}$ 是 X 上的一个拓扑。这个拓扑称为**离散拓扑** (discrete topology)；$(X, \mathscr{D})$ 称为**离散拓扑空间** (discrete topological space) 或简称为**离散空间** (discrete space)。

例 1.4 从公理 $[O_1]$ 看出，X 上的拓扑必含集 X 及 $\varnothing$。X 的子集组 $\mathscr{I}=\{X, \varnothing\}$，只由 X 与 $\varnothing$ 所构成，也是 X 上的一个拓扑。这个拓扑称为**不可分拓扑** (indiscrete topology)；$(X, \mathscr{I})$ 称为**不可分拓扑空间**(indiscrete topological space)或简称为**不可分空间**(indiscrete space)。

例 1.5 设 τ 为 X 的子集组，它由每个有限集的余集及空集 $\varnothing$ 所构成。则 τ 也是 X 上的一个拓扑，称为 X 上的**有限余拓扑** (cofinite topology) 或称 X 上的 **T_1-拓扑**，(T_1-topology) (T_1 的意义将在第十章中说明)。

例 1.6 X 上的任意两个拓扑 τ_1 与 τ_2 的交 $\tau_1 \cap \tau_2$ 也是 X 上的一个拓扑。因为由 $[O_1]$，τ_1 与 τ_2 都含有 X 与 $\varnothing$，故 τ_1，τ_2 也含 X 与 $\varnothing$，即 $\tau_1 \cap \tau_2$ 满足 $[O_1]$。又若 $G, H \in \tau_1 \cap \tau_2$，则 $G, H \in \tau_1$ 与 $G, H \in \tau_2$，于是由 τ_1 及 τ_2 都是拓扑而知，$G \cap H \in \tau_1$ 从 $G \cap H \in \tau_2$，从而

$$G \cap H \in \tau_1 \cap \tau_2$$

即 $\tau_1 \cap \tau_2$ 满足 $[O_3]$。类似地可证 $\tau_1 \cap \tau_2$ 满足 $[O_2]$。

最后例题中的命题可推广到任何拓扑簇上去，即：

定理 5.1 设 $\{\tau_i: i \in I\}$ 是集 X 上的任何一簇拓扑，则交 $\bigcap_i \tau_i$ 也是 X 上的一个拓扑。

作为最后一例，我们指出：**拓扑之并不必是拓扑。**

例 1.7 令 $X=\{a, b, c\}$，则

$$\tau_1=\{X, \varnothing, \{a\}\} \quad 及 \quad \tau_2=\{X, \varnothing, \{b\}\}$$

都是 X 上的拓扑，但

$$\tau_1\cup\tau_2=\{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}\}$$

却不是 X 上的拓扑。因为它不满足公理 $[O_2]$。这由 $\{a\}\in\tau_1\cup\tau_2$，$\{b\}\in\tau_1\cup\tau_2$，但 $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin\tau_1\cup\tau_2$ 可以看出。

当开集 G 含点 $p\in X$ 时，称 G 为 p 的一个**开邻域** (open neighbourhood)，而 $G\setminus\{p\}$ 则称为 p 的一个**空心开邻域** (deleted open neighbourhood)。

注意 公理 $[O_1]$，$[O_2]$ 及 $[O_3]$ 等价于下列两条公理：

$[O_1^*]$ τ 中任意多个集的并属于 τ。

$[O_2^*]$ τ 中任意有限个集的交属于 τ。

因为
$$\bigcup\{G;\ G\in\varnothing\}=\varnothing$$
即集的空并是空集。从而由 $[O_1^*]$ 可推出 $\varnothing$ 属于 τ。另外，又因为
$$\bigcap\{G;\ G\in\varnothing\}=X$$
即 X 的子集的空交是 X 本身。从而由 $[O_2^*]$ 可推出 X 属于 τ。

聚点 (Accumulation points)

设 X 是拓扑空间，A 是 X 的一个子集，则一点 $p\in X$ 称为 A 的一个**聚点** (accumulation point) 或**极限点** (limit point) (也称丛点 (cluster point) 或导出点 (derived point))，是指：任何含 p 的开集 G 必含 A 的一个异于 p 的点，亦即：

$$G \text{ 开}, \ p\in G \Longrightarrow (G\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing。$$

A 的聚点集，记为 A'，称作 A 的**导集** (derived set)。

例 2.1 设 $X=\{a, b, c, d, e\}$，则集组

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

定义了 X 上的一个拓扑。现考察 X 的子集 $A=\{a, b, c\}$，则 b 是 A 的一个聚点，因含 b 的开集有 $\{b, c, d, e\}$ 与 X，而这些开集都含有 A 中异于 b 的元素即 c。反之，a 不是 A 的聚点，例如开集 $\{a\}$ 含 a，而不含 A 中异于 a 的元素。类似地可知 d，e 是 A 的聚点，而 c 则不是。故 A 的导集

$$A'=\{b, d, e\}。$$

例 2.2 设 X 为不可分拓扑空间，即其开集只有 X 与 $\varnothing$，则 X 是能含任何一点 $p \in X$ 的唯一开集，因此除了空集 $\varnothing$ 及单元素集 $\{p\}$ 外，X 的任何其他子集都以 p 为聚点，故得

$$A'=\begin{cases} \varnothing & \text{若 } A=\varnothing \\ \{p\}^c=X\setminus\{p\} & \text{若 } A=\{p\} \\ X & \text{若 } A \text{ 含两个以上的点。} \end{cases}$$

注意：对于 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}^2$ 上的通常拓扑来说，上面的聚点定义和第四章所给的相同。

闭集（Closed sets）

设 X 是拓扑空间，A 是 X 的一个子集，则 A 称为一个**闭集**(closed set)是指它的余集 A^c 是一个开集。

例 3.1 设 $X=\{a, b, c, d, e\}$，则

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

定义了 X 上的一个拓扑，此拓扑空间的闭集为

$$\varnothing, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}。$$

它们是 X 中开集的余集。注意：X 有些子集既是开集，又是闭集，如 $\{b, c, d, e\}$ 就是。另有一些子集，它既非开集，又

非闭集，如$\{a, b\}$就是。

例 3.2 设X为离散拓扑空间，即X的每个子集都是开集。但这样一来，X的每个子集也是闭的。这说明在这个拓扑空间里，X的每个子集既是闭的，又是开的。

我们知道，对空间X的任何子集A，有$A^{cc}=A$由此得：

命题 5.2 在拓扑空间X中，X的子集A为开集的充要条件是A^c是闭集。

由拓扑空间的公理$[O_1]$，$[O_2]$，$[O_3]$及 De Morgan 律即得：

定理 5.3 设X为拓扑空间，则X的闭集组具备以下性质：

(i) X与$\emptyset$是闭集；

(ii) 任何多个闭集之交是闭集；

(iii) 任意两个闭集之并是闭集。

闭集也可以用它的聚点来刻划如下：

定理 5.4 拓扑空间X的子集A是闭集的充要条件为A含有它的一切聚点。

换句话说，A是闭集的充要条件是A的导集A'成为A的子集，即：$A' \subset A$。

集的闭包（Closure of a set）

设A为拓扑空间X的一个子集，则A的**闭包**(closure)是指A的一切闭的母集的交；并把它记为

$$\overline{A} \quad 或 \quad A^-$$

换句话说，若$\{F_i: i \in I\}$表示X中所有含A的闭集所成的组，则

$$\overline{A}=\bigcap_i F_i。$$

首先注意：$\overline{A}$ 作为一些闭集的交，它是闭集；其次 $\overline{A}$ 是 A 的最小的闭母集。就是说，若 F 是含 A 的闭集，则

$$A\subset\overline{A}\subset F。$$

由此可知：A 为闭集的充要条件是

$$A=\overline{A}。$$

综合起来，可叙述如下：

命题5.5 设 $\overline{A}$ 是集 A 的闭包，则

（i）$\overline{A}$ 是闭集；

（ii）若 F 是 A 的一个闭母集，则 $A\subset\overline{A}\subset F$；

（iii）A 是闭集，当且仅当 $A=\overline{A}$。

例 4.1 考察例3.1所说的 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 上的拓扑，其中 X 上的闭集为：

$$\varnothing, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}。$$

因此

$$\overline{\{b\}}=\{b, e\}, \overline{\{a, c\}}=X, \overline{\{b, d\}}=\{b, c, d, e\}。$$

例 4.2 设 X 为有限余拓扑空间，即：其开集为有限集之余集及$\varnothing$，于是闭集就是有限集及 X 本身。因此，若 $A\subset X$ 是有限集，则其闭包 $\overline{A}$ 就是 A，因为 A 本身是闭集。反之，若 $A\subset X$ 是无限集，则能含 A 的闭集只有 X，从而 $\overline{A}$ 就是 X。合起来就得：在有限余拓扑空间 X 中，对于任何集 A，有

$$\overline{A}=\begin{cases}A & \text{若 } A \text{ 是有限集}\\ X & \text{若 } A \text{ 是无限集。}\end{cases}$$

一个集的闭包可以完整地用聚点来描述如下：

定理5.6 设A是拓扑空间X的一个子集，则A的闭包就是A和它的聚点集之并，即：

$$\bar{A}=A\cup A'。$$

一点$p\in X$称为集$A\subset X$的一个**闭包点**(closure point)或**附着点**(adherent point)是指p属于A的闭包，即$p\in\bar{A}$。由前面的定理得：$p\in X$是$A\subset X$的一个闭包点的充要条件是$p\in A$或$p\in A'$。

例4.3 试考察有理数集$\mathbf{Q}$。由从前的讨论已知在$\mathbf{R}$的通常拓扑中，每个实数$a\in\mathbf{R}$都是$\mathbf{Q}$的聚点。因此$\mathbf{Q}$的闭包是整个实数集$\mathbf{R}$，即。$\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$。

拓扑空间X的子集A称为在集$B\subset X$中**稠密**(dense)是指B被含在A的闭包中，即：$B\subset\bar{A}$。特别是：A在X中稠密或称A是X的一个稠密子集，其充要条件是$\bar{A}=X$。

例4.4 在例4.1中

$$\overline{\{a, c\}}=X, \quad \overline{\{b, d\}}=\{b, c, d, e\}。$$

其中$X=\{a, b, c, d, e\}$，因此$\{a, c\}$是X的稠密子集，而$\{b, d\}$则不是。

例4.5 在例4.3中已指出$\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$。换句话说，在通常拓扑中，有理数集$\mathbf{Q}$在$\mathbf{R}$中稠密。

把X的任何子集A规定它的闭包$\bar{A}\subset X$的这个"闭包运算"，具备下面命题中列出的四个性质。这四个性质称为Kuratouski闭包公理。它们之所以被称为公理是因为它们也可以用来定义X上的拓扑，关于这点我们以后再作论证。

命题5.7 (i) $\bar{\varnothing}=\varnothing$；

(ii) $A\subset\bar{A}$；

(iii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(iv) $(A^{-})^{-}=\overline{A}$。

内集、外集、边界 (Interior, exterior, boundary)

设A是拓扑空间X的一个子集，则一点$p\in A$称为A的一个**内点**(Interior point)是指：p属于一开集G，而G含在A内，即：

$$p\in G\subset A,\quad 其中\ G\ 是开集。$$

A的一切内点所构成的集，记为

$$\mathrm{int}(A)\quad 或\quad \mathring{A}\quad 或\quad A^{\circ}$$

称为**A的内集**(interior of A)。它可用下面的命题来刻划：

命题5.8 集A的内集是A的一切开子集的并。此外

(i) A°是开集；

(ii) A°是A的最大的开子集。即：若G是A的开子集，则$G\subset A^{\circ}\subset A$；

(iii) A是开集，当且仅当$A=A^{\circ}$。

A的外集(exterior of A)记为$\mathrm{ext}(A)$，是指A的余集的内集，即：

$$\mathrm{ext}(A)=\mathrm{int}(A^{c})。$$

A的边界(boundary of A)记为$b(A)$，是指这样一些点所构成的集，这些点既不属于A的内集，也不属于A的外集。

下面的定理说明内集、外集与闭包之间的一个重要关系：

定理5.9 设A为拓扑空间X的子集，则A的闭包是A的内集与A的边界的并。即：

$$\bar{A}=A^{\circ}\cup b(A)。$$

例 5.1 考察下列四个区间：$[a, b]$，(a, b)，$(a, b]$ 及 $[a, b)$，它们的端点都是 a 与 b。则每个区间的内集都是开区间 (a, b)；每个区间的边界都是两个端点所构成的集，即 $\{a, b\}$。

例 5.2 考察 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 上的拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

及 X 的子集 $A=\{b, c, d\}$，则点 c, d 都是 A 的内点，因为

$$c, d\in\{c, d\}\subset A,$$

其中 $\{c, d\}$ 是一个开集。点 b 则不是 A 的内点。因此 $\mathrm{int}(A)=\{c, d\}$。只有点 $a\in X$ 是 A 的外点，即 $A^c=\{a, e\}$ 的内点，所以 $\mathrm{int}(A^c)=\{a\}$，于是 A 的边界由点 b 与点 e 所构成，即 $b(A)=\{b, e\}$。

例 5.3 考察有理数集 $\mathbf{Q}$。因 $\mathbf{R}$ 中的任何开集既含有理点也含无理点，故 $\mathbf{Q}$ 既无内点也无外点。即 $\mathrm{int}(\mathbf{Q})=\varnothing$ 与 $\mathrm{ext}(\mathbf{Q})=\mathrm{int}(\mathbf{Q}^c)=\varnothing$。于是 $\mathbf{Q}$ 的边界是整个实数集，即 $b(\mathbf{Q})=\mathbf{R}$。

拓扑空间 X 的子集 A 称为**在 X 中无处稠密**（nowherf dense in X）是指：**A 的闭包的内集是空集**，即：

$$\mathrm{int}(\bar{A})=\varnothing。$$

例 5.4 考察 $\mathbf{R}$ 的子集 $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$，则由前面已知 A 只有一个聚点 0。因此，$\bar{A}=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$。这个集 $\bar{A}$ 没有内点，所以 A 在 $\mathbf{R}$ 无处稠密。

例 5.5 设 A 为 0 与 1 之间的有理点集，即

$$A=\{x: x\in\mathbf{Q}, 0<x<1\},$$

则 A 的内集是空集，即 $\mathrm{int}(A)=\varnothing$，但 A 并不是在 $\mathbf{R}$ 无处稠

素，因为 $\bar{A}=[0, 1]$，从而

$$\text{int}(\bar{A})=\text{int}([0, 1])=(0, 1)$$

并不是空集。

邻域与邻域系（Neighbourhoods and neighbourhood systems）

设 p 为拓扑空间 X 的一点，N 是 X 的一个子集，则当 N 是一个含 p 点的开集 G 的母集时，即当

$$p\in G\subset N \qquad \text{其中}G\text{是一个开集}$$

时，称 N 为 p 点的一个**邻域**(neighbourhood)。换句话说，关系"N 是点 p 的一个邻域"是关系"p 是 N 的一个内点"的逆。p 点的所有邻域所成的组记为 $\mathscr{N}_p$，称为 p 点的**邻域系**(neighbourhood system)。

例 6.1 设 a 为一实数，即 $a\in\mathbf{R}$，则每个以 a 为中心的闭区间 $[a-\delta, a+\delta]$ 都是 a 的一个邻域，因为它含开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，而这个开区间含 a。类似地，若 p 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一点，则每个以 p 为中心的闭盘 $\{q\in\mathbf{R}^2: d(p, q)\leqslant\delta\neq 0\}$ 都是 p 的一个邻域，因为它含以 p 为中心的开盘。

关于点 $p\in X$ 的邻域系 $\mathscr{N}_p$，最重要的结论是罗列在下面命题中的四个性质，它们称为邻域公理。这样称呼的原因是也可以用它们作为公理来定义 X 的拓扑。关于这个问题，我们在后面再作讨论。

命题 5.10

(i) $\mathscr{N}_p$ 不是空组，而且 p 含在 $\mathscr{N}_p$ 的每个元素内。

(ii) $\mathscr{N}_p$ 中任何两个元素的交仍属于 $\mathscr{N}_p$。

(iii) $\mathscr{N}_p$ 中任何元素的任何母集都属于 $\mathscr{N}_p$。

（iv）$\mathscr{N}_p$ 的每个元素N都含有 $\mathscr{N}_p$ 的一个这样的元素G，这个 G 是它所含的每一点的一个邻域，即：对于每个 $g\in G$ 有 $G\in\mathscr{N}_g$。

收敛序列（Convergent sequences）

设 $\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\rangle$为拓扑空间 X 的一个点列，b是 X 中的一点，如果对于每个含 b 的开集G，相应地有一正整数 $n_0\in\mathbf{N}$ 存在，使

$$\text{当 } n>n_0 \text{ 时，就有 } a_n\in G,$$

也就是说，G 包含了点列的几乎所有的项，则称点列$\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\rangle$ **收敛于**(converges to) 点 b，或称 b 是序列 $\langle a_n\rangle$ 的**极限**(limit)，并记为：

$$\lim_{n\to\infty} a_n=b \quad \text{或} \quad \lim a_n=b \quad \text{或} \quad a_n\to b。$$

例 7.1 设 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 为非离散拓扑空间 $(X, \mathscr{I})$中的一个点列。则

（i）X 是能含有 X 中的点 b 的唯一开集。

（ii）X 含点列 $\langle a_n\rangle$ 的每一项，因此点列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 收敛于 X 的每一点 $b\in X$。

例 7.2 设 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 为离散拓扑空间 $(X, \mathscr{D})$ 的点列。在此空间中，对于每一点 $b\in X$ 来说，单元素集 $\{b\}$ 是含 b 的一个开集。于是，若要 $a_n\to b$，则集 $\{b\}$ 必须含有序列 $\langle a_n\rangle$ 的几乎所有的项。换句话说，序列$\langle a_n\rangle$收敛于 $b\in X$ 的充要条件是这个序列具备以下形式：

$$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, b, \cdots\rangle。$$

例 7.3 设 τ 为无限集X上的拓扑，这个拓扑由$\varnothing$及可数集的余集所构成。（见习题56）则可证：X 中的序列

$\langle a_1, a_2, \cdots \rangle$ 收敛于 $b \in X$ 的充要条件是这个序列也具备以下的形式 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, \cdots \rangle$，即：由 $\langle a_n \rangle$ 中不同于 b 的各项所构成的集 A 是一个有限集。因 A 可数，故 A^c 是含 b 的一个开集。因此，若 $a_n \to b$，则 A^c 必须含 $\langle a_n \rangle$ 的几乎所有的项。因此 A 是有限集。

较粗与较精的拓扑（Coarser and finer topologies）

设 τ_1 与 τ_2 为非空集 X 上的两个拓扑，若每个 τ_1-开集都是一个 τ_2-开集，就是说，设 τ_1 是 τ_2 的一个子组，即，$\tau_1 \subset \tau_2$，则称拓扑 τ_1 **粗于** (coarser than) 或 **小于** (smaller than) 或 **弱于** (weaker than) 拓扑 τ_2；或称 τ_2 **精于** (finer) 或 **大于** (larger than) τ_1。注意：X 上所有的拓扑所构成的簇 $\mathbf{T}=\{\tau_i\}$ 按组包序关系而成为一个部分序簇。因此，当 $\tau_1 \subset \tau_2$ 时，我们也写：

$$\tau_1 \lesssim \tau_2 。$$

若两个拓扑中的任何一个都不粗于另一个，则称它们是**不可比较**的(not comparable)。

例 3.1 X 上的离散拓扑 $\mathscr{D}$、非离散拓扑 $\mathscr{I}$ 及其他任何拓扑 τ 之间有以下关系：τ 粗于 $\mathscr{D}$ 而精于 $\mathscr{I}$，即

$$\mathscr{I} \lesssim \tau \lesssim \mathscr{D} 。$$

例 3.2 考察 $\mathbf{R}^2$ 平面上的有限余拓扑 τ 与通常拓扑 $\mathscr{U}$。只须注意：$\mathbf{R}^2$ 的每个有限子集是一个 $\mathscr{U}$-闭集，因此它的余集是一个 $\mathscr{U}$-开集。这说明：每一个 τ-开集都是一个 $\mathscr{U}$-开集。所以 τ 粗于 $\mathscr{U}$，即 $\tau \lesssim \mathscr{U}$。

子空间与相对拓扑（Subspaces, relative topologies）

设A为拓扑空间(X, τ)的一个非空子集，则A与X中所有的τ-开集作交而得的集组τ_A是A上的一个拓扑。这个拓扑称为A上的**相对拓扑**(relative topology)或称拓扑τ**在A上的相对化**(relativization of τ to A)，而拓扑空间(A, τ_A)则称为(X, τ)的一个子空间。换句话说，A的子集H是一个τ_A-开集(也称：相对于A为开的集)的充要条件是有X的一个τ-开集G使得

$$H=G\cap A。$$

例 9.1 考察$X=\{a, b, c, d, e\}$的拓扑

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

及X的子集$A=\{a, d, e\}$。注意：

$$X\cap A=A, \qquad \varnothing\cap A=\varnothing$$
$$\{a\}\cap A=\{a\}, \qquad \{c, d\}\cap A=\{d\}$$
$$\{a, c, d\}\cap A=\{a, d\}, \quad \{b, c, d, e\}\cap A=\{d, e\}$$

故τ在A上的相对化是

$$\tau_A=\{A, \varnothing, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}。$$

例 9.2 考察$\mathbf{R}$上的通常拓扑$\mathscr{U}$及其在闭区间

$$A=[3, 8]$$

的相对化，则半闭半开区间$[3, 5)$是A上相对拓扑的开集，就是说，是一个τ_A-开集，这是因为

$$[3, 5)=(2, 5)\cap A$$

其中$(2, 5)$是$\mathbf{R}$的一个τ-开集。由此可见：相对于子空间是开的集在全空间中可以是既非开集，也非闭集。

拓扑的等价定义 （Equivalent definition of topologies）

我们在前面是用开集公理来定义拓扑空间的，就是说把开集作为拓扑的原始概念。下面的两个定理说明也可以用别的方法来定义一个集上的拓扑，即：用“点的邻域”或“集的闭包”作为原始概念来定义拓扑。

定理 5.11 设 X 是一个非空集，又设对于每一点 $p\in X$，有 X 的一个集组 $\mathscr{A}_p$ 与之对应，而这个集组满足下列四条公理：

[A_1] $\mathscr{A}_p$ 不是空组，而 p 含在 $\mathscr{A}_p$ 的每个元素之中。

[A_2] $\mathscr{A}_p$ 的任何两个元素之交也属于 $\mathscr{A}_p$。

[A_3] $\mathscr{A}_p$ 的一个元素的任何母集都属于 $\mathscr{A}_p$。

[A_4] $\mathscr{A}_p$ 的每个元素 N 都含有一个子集 $G\in\mathscr{A}_p$ 使得对于每个 $g\in G$ 有 $G\in\mathscr{A}_g$。

则 X 上有一个而且只有一个拓扑 τ 存在使得 $\mathscr{A}_p$ 就是点 $p\in X$ 的 τ-邻域系。

定理 5.12 设 X 为非空集。又设 K 为一运算，它对于 X 的任一子集 A，指定 X 的一个子集 A^K 与之对应，这个对应满足以下四条公理（称为 Kuratowski 闭包公理）

[K_1] $\varnothing^K=\varnothing$

[K_2] $A\subset A^K$

[K_3] $(A\cup B)^K=A^K\cup B^K$

[K_4] $(A^K)^K=A^K$

则 X 上有一个而且只有一个拓扑 τ 存在使得 A^K 就是集 A 的 τ-闭包。

习 题 解 答

拓扑与开集

1．设 $X=\{a, b, c, d, e\}$。试问下列集组中，哪个是 X 上的拓扑：

（i）$\tau_1=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$；

（ii）$\tau_2=\{X, \varnothing, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$；

（iii）$\tau_3=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$。

解：(i) τ_1 不是 X 上的拓扑，因为 $\{a, b\}, \{a, c\} \in\tau_1$ 但是 $\{a, b\}\cup\{a, c\}=\{a, b, c\}\notin\tau_1$。

(ii) τ_2 不是 X 上的拓扑，因为 $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}\in\tau_2$ 但是 $\{a, b, c\}\cap\{a, b, d\}=\{a, b\}\notin\tau_2$。

(iii) τ_3 是 X 上的拓扑，因为它满足所有三条公理。

2．设 τ 是 $\mathbf{R}$ 的一个集组，它由 $\mathbf{R}$, $\varnothing$ 及所有无限开区间 $A_q=(q, \infty)$所构成，其中 $q\in\mathbf{Q}$ 是有理数。求证：τ 不是 $\mathbf{R}$ 上的拓扑。

解：考察

$$A=\bigcup\{A_q;\ q\in\mathbf{Q}, q>\sqrt{2}\}=(\sqrt{2}, \infty),$$

它是 τ 的元素之并，但因 $\sqrt{2}$ 是无理数，故 $A\notin\tau$。所以 τ 不满足$[O_2]$，从而不是 $\mathbf{R}$ 上的拓扑。

3．设 τ 是 X 上的拓扑，它由四个集构成：

$$\tau=\{X, \varnothing, A, B\}$$

A 与 B 是 X 的非空真子集，两者不相等。试问 A、B 必须满足什么条件？

解：由于 $A\cap B$ 必须属于 τ，所以有下述两种可能情况：

情况 1：$A\cap B=\varnothing$，则 $A\cup B$ 不能是 A 也不能是 B，从而只能是 X。这就是说，集组 $\{A, B\}$ 是 X 的一个分割。

情况 2：$A\cap B=A$ 或 $A\cap B=B$，在这两种情况下，A，B 之一是另一的子集，从而 τ 按集包含关系成为全序组：$\varnothing\subset A\subset B\subset X$ 或 $\varnothing\subset B\subset A\subset X$。

4．列出 $X=\{a, b, c\}$ 上一切由四个集构成的拓扑。

解：X 上任何一个由四个集构成的拓扑都有以下的形式：$\tau=\{X, \varnothing, A, B\}$，其中的 A 与 B 根据上一道题分两种情况讨论。

情况 1：$\{A, B\}$ 是 X 的一个分割。相应的拓扑有以下几种：

$\tau_1=\{X, \varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$；

$\tau_2=\{X, \varnothing, \{b\}, \{a, c\}\}$；

$\tau_3=\{X, \varnothing, \{c\}, \{a, b\}\}$。

情况 2：τ 按集包含关系成为全序组。相应的拓扑有以下几种：

$\tau_4=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$；

$\tau_5=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, c\}\}$；

$\tau_6=\{X, \varnothing, \{b\}, \{b, c\}\}$；

$\tau_7=\{X, \varnothing, \{b\}, \{a, b\}\}$；

$\tau_8=\{X, \varnothing, \{c\}, \{a, c\}\}$；

$\tau_9=\{X, \varnothing, \{c\}, \{b, c\}\}$。

5．设 f：$X\to Y$ 是由非空集 X 到拓扑空间 $(Y, \mathscr{U})$ 的一个函数。又设 τ 是由 Y 中一切开集的逆象所构成的集组：

$$\tau=\{f^{-1}[G]: G\in\mathscr{U}\}。$$

求证：τ 是 X 上的一个拓扑。

解：因 $\mathscr{U}$ 是 Y 上的拓扑，故 Y，$\varnothing\in\mathscr{U}$，但

$$X=f^{-1}[Y]；\quad \varnothing=f^{-1}[\varnothing]$$

故 X，$\varnothing\in\tau$。从而 τ 满足公理$[O_1]$。

令 $\{A_i\}$ 为 τ 中的一个集组。按定义，有 $G_i\in\mathscr{U}$ 存在使 $A_i=f^{-1}[G_i]$，但

$$\bigcup_i A_i=\bigcup_i f^{-1}[G_i]=f^{-1}[\bigcup_i G_i]。$$

因 $\mathscr{U}$ 是拓扑，故 $\bigcup_i G_i\in\mathscr{U}$，从而 $\bigcup_i A_i\in\tau$。因此 τ 满足公理$[O_2]$。

最后，令 A_1，$A_2\in\tau$，则

$$\exists\, G_1,\ G_2\in\mathscr{U}\ 使\ A_1=f^{-1}[G_1],\ A_2=f^{-1}[G_2]$$

但 $$A_1\cap A_2=f^{-1}[G_1]\cap f^{-1}[G_2]=f^{-1}[G_1\cap G_2]$$

而且 $G_1\cap G_2\in\mathscr{U}$，故 $A_1\cap A_2\in\tau$。因此 τ 也满足公理$[O_3]$。

6．求证：关于集X上的拓扑 τ 的第二条公理“$[O_2]\tau$ 中任何多个元素之并也属于 τ”，可以用下述的较弱的公理来代替，即“$[O_2']\tau\setminus\{X,\varnothing\}$中任何多个元素之并也属于 τ”。换句话说，公理系$[O_1]$、$[O_2']$、$[O_3]$等价于公理系$[O_1]$、$[O_2]$、$[O_3]$。

解：设 τ 为 X 的子集组，满足$[O_1]$、$[O_2']$、$[O_3]$；又设 $\mathscr{A}$ 是 τ 的一个子组。我们要证明 $\bigcup\{E: E\in\mathscr{A}\}\in\tau$。就是说要证明 τ 也满足$[O_2]$。为此分两种情况：

情况 1：$X\in\mathscr{A}$。

则 $\bigcup\{E: E\in\mathscr{A}\}=X$，从而由$[O_1]$可知它也属于 τ。

情况 2：$X\notin\mathscr{A}$。

则 $$\bigcup\{E: E\in\mathscr{A}\}=\bigcup\{E: E\in\mathscr{A}\setminus\{X\}\}$$

但作集的并时，空集$\varnothing$不给出任何元素，所以

$$\begin{aligned}\bigcup\{E:\ E\in\mathscr{A}\}&=\bigcup\{E:\ E\in\mathscr{A}\setminus\{X\}\}\\&=\bigcup\{E:E\in\mathscr{A}\setminus\{X,\ \varnothing\}\}。\qquad(1)\end{aligned}$$

因为$\mathscr{A}$是τ的一个子组，故$\mathscr{A}\setminus\{X,\ \varnothing\}$是$\tau\setminus\{X,\ \varnothing\}$的子组。于是由[$O_2'$]，(1)中的并属于$\tau$。

7．设A是拓扑空间X的一个子集，它具备下述的性质：每点$p\in A$属于含在A内的某一开集G_p。求证A是开集。

解： 因为对每点$p\in A$有$p\in G_p\subset A$，所以

$$\bigcup\{G_p:\ p\in A\}=A$$

即：A是一些开集的并，于是由[O_2]知A是开集。

8．设τ是X的一个子集组，它按集的包含关系成为全序组。求证：τ满足[O_3]，即：τ中两个集的交仍属于τ。

解： 设A，$B\in\tau$。因τ按集的包含关系成为全序组，所以有

$$A\cap B=A\quad 或\quad A\cap B=B,$$

在任何一种情况下都有$A\cap B\in\tau$，即τ满足[O_3]。

9．设τ为$\mathbf{R}$的一个子集组，由$\mathbf{R}$、$\varnothing$及一切形如$E_a=(a,\ \infty)$的无限开区间所构成，其中$a\in\mathbf{R}$。求证：τ是$\mathbf{R}$上的一个拓扑。

解： 因为$\mathbf{R}$、$\varnothing\in\tau$，故τ满足[O_1]。又因τ按集的包含关系是全序集，故τ满足[O_3]。

现在设$\mathscr{A}$是$\tau\setminus\{X,\ \varnothing\}$的子组，就是说$\mathscr{A}=\{E_i:\ i\in I\}$，其中$I$是某个实数集。我们要证$\bigcup_i E_i\in\tau$。若$I$不是下有界的，即若$\inf(I)=-\infty$，则$\bigcup_i E_i=\mathbf{R}$。若$I$是下有界的，例如$\inf(I)=i_0$，则$\bigcup_i E_i=(i_0,\ \infty)=E_{i_0}$。在任何情况下，

$\bigcup_i E_i \in \tau$，故 τ 满足$[O_2']$。

10. 设 τ 为 $\mathbf{N}$ 的子集组，由$\varnothing$及 $\mathbf{N}$ 的所有形如

$$E_n=\{n, n+1, n+2, \cdots\}$$

的子集所构成，其中 $n\in\mathbf{N}$。

（i）求证：τ 是 $\mathbf{N}$ 上的一个拓扑，

（ii）把含整数 6 的一切开集列出来。

解：(i) 因为 $\varnothing$ 和 $E_1=\{1, 2, 3, \cdots\}=\mathbf{N}\in\tau$，故 τ 满足$[O_1]$。另外，因为 τ 按集包含关系是全序集，故 τ 也满足$[O_3]$。

现在设 $\mathscr{A}$ 是 $\tau\backslash\{\mathbf{N}, \varnothing\}$ 的一个子组，就是说，

$$\mathscr{A}=\{E_n: n\in I\},$$

其中 I 是某个正整数集。则 I 含有一个最小正整数 n_0，而且

$$\bigcup\{E_n: n\in I\}=\{n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots\}=E_{n_0}$$

属于 τ。因此 τ 满足$[O_2']$。所以 τ 是 $\mathbf{N}$ 上的拓扑。

(ii) 因为非空开集的形式如下：

$$E_n=\{n, n+1, n+2, \cdots\}$$

其中 $n\in\mathbf{N}$。故含正整数 6 的一切开集列出如下：

$E_1=\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$　　$E_4=\{4, 5, 6, \cdots\}$

$E_2=\{2, 3, 4, \cdots\}$　　$E_5=\{5, 6, 7, \cdots\}$

$E_3=\{3, 4, 5, \cdots\}$　　$E_6=\{6, 7, 8, \cdots\}$。

聚点与导集

11. 设 τ 为 $\mathbf{N}$ 上的拓扑，由$\varnothing$及 $\mathbf{N}$ 的形如

$$E_n=\{n, n+1, n+2, \cdots\}$$

的子集所构成，其中 $n\in\mathbf{N}$，如习题 10 中所述。

（i）求 $A=\{4, 13, 28, 37\}$ 的一切聚点。

(ii) 求 $\mathbf{N}$ 的一切子集 E，使 $E'=\mathbf{N}$。

解：(i) 注意：含点 $p\in\mathbf{N}$ 的开集是这样一些集：

$$E_i=\{i,\ i+1,\ i+2\cdots\},\quad i\leqslant p。$$

因此当 $n_0\leqslant 36$ 时，每个含 n_0 的开集也必含 $37\in A$，而 $37\neq n_0$，因此当 $n_0\leqslant 36$ 时，它是 A 的聚点。反之当 $n_0>36$ 时，开集 $E_{n_0}=\{n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ \cdots\}$ 不含 A 中异于 n_0 的点。因此，当 $n_0>36$ 时，它不是 A 的一个聚点。所以 A 的导集 $A'=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 34,\ 35,\ 36\}$。

(ii) 若 E 是 $\mathbf{N}$ 的一个无限子集，则 E 无上界，故含任意点 $p\in\mathbf{N}$ 的开集亦必含 E 的异于 p 的点，所以 $E'=\mathbf{N}$。另一方面，若 E 是有限集，则 E 有上界。例如 $n_0\in\mathbf{N}$ 是它的一个上界，则开集 E_{n_0+1} 将不含 E 的任何点，所以 $n_0+1\in\mathbf{N}$ 就不是 E 的聚点，因此 $E'\neq\mathbf{N}$。

12. 设 A 为拓扑空间 (X,τ) 的一个子集。试问 $p\in X$ 在何种情况下不是 A 的一个聚点。

解：点 $p\in X$ 为 A 的极限点的充要条件是 p 的任何开邻域含有 A 中异于 p 的点。即：由

$$p\in G\ \text{与}\ G\in\tau\quad\text{得}\quad (G\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing。$$

因此，若有开集 G 使

$$p\in G\quad\text{与}\quad (G\setminus\{p\})\cap A=\varnothing$$

成立，或等价地说若

$$p\in G\quad\text{与}\quad G\cap A=\varnothing\ \text{或}\ G\cap A=\{p\}$$

成立，或再换一种形式说若

$$p\in G\quad\text{与}\quad G\cap A\subset\{p\},$$

则 p 就不是 A 的聚点。

13. 设 A 为离散拓扑空间 X 的任意一子集。求证：A 的

导集 A' 必为空集。

解：设 p 为 X 中任何一点。我们知道离散空间中每个子集都是开集，因此，单元素集 $G=\{p\}$ 也是 X 的一个开子集。但

$$p\in G \quad \text{而} \quad G\cap A=(\{p\}\cap A)\subset\{p\},$$

因此由上题，对于每点 $p\in X$ 都有 $p\notin A'$，即 $A'=\varnothing$。

14．考察 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 上的拓扑

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

求下列两集的导集：(i) $A=\{c, d, e\}$；(ii) $B=\{b\}$。

解：(i) 注意 $G=\{a, b\}$ 及 $H=\{a, b, e\}$ 是 X 的开子集，因两得

$$a, b\in G=\{a, b\} \quad \text{及} \quad G\cap A=\varnothing$$

$$e\in H=\{a, b, e\} \quad \text{及} \quad H\cap A=\{e\}。$$

因此 a，b 和 e 都不是 A 的聚点。反之，X 中其他的任何一点都是 A 的聚点。因为含这个点的任何开集必含有 A 中与它不同的一点。所以 $A'=\{c, d\}$。

(ii) 注意 $\{a\}$，$\{a, b\}$ 和 $\{a, c, d\}$ 是 X 的开子集，因而得

$$a\in\{a\} \quad \text{及} \quad \{a\}\cap B=\varnothing$$

$$b\in\{a, b\} \quad \text{及} \quad \{a, b\}\cap B=\{b\}$$

$$c, d\in\{a, c, d\} \quad \text{及} \quad \{a, c, d\}\cap B=\varnothing。$$

因此 a，b，c 和 d 不是 $B=\{b\}$ 的聚点。但 e 是 B 的聚点，因为含 e 的开集是 $\{a, b, e\}$ 及 X，它们都含异于 e 的点 $b\in B$。所以 $B'=\{e\}$。

15．求证：若 A 是 B 的子集，则 A' 也是 B' 的子集。

解：我们知道，$p\in A'$ 的充要条件是对于任何含 p 的开

集G有$(G\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing$成立。现在$B\supset A$，因此

$$(G\setminus\{p\})\cap B\supset(G\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing。$$

由此可见，若$p\in A'$则$p\in B'$，也就是说$A'\subset B'$。

16．设τ_1与τ_2是X上的拓扑，而且$\tau_1\subset\tau_2$，即：X的任何τ_1-开子集，也是它的一个τ_2-开子集。又设A为X的一个子集。

（i）求证：A的每个τ_2-聚点一定是一个τ_1-聚点。

（ii）试造一个空间，使有的τ_1-聚点不是τ_2-聚点。

解：(i) 设p是A的一个τ_2-聚点，即

$$(G\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing$$

对于每个含p的$G\in\tau_2$成立，则因$\tau_1\subset\tau_2$而有

$$(G\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing$$

对于每个含p的$G\in\tau_1$成立。这就是说p是A的一个τ_1-聚点。

(ii) 考察$\mathbf{R}$上的通常拓扑$\mathscr{U}$和离散拓扑$\mathscr{D}$，则因$\mathscr{D}$含有$\mathbf{R}$的一切子集而知$\mathscr{U}\subset\mathscr{D}$。由习题13知道：令

$$A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$$

则因$A'=\varnothing$而知O不是A的$\mathscr{D}$-聚点。但O是A的$\mathscr{U}$聚点。

17．求证：设A与B是拓扑空间(X,τ)的子集，则

$$(A\cup B)'=A'\cup B'。$$

解：利用习题15可知，因 $A\subset A\cup B$ 故 $A'\subset(A\cup B)'$

因 $B\subset A\cup B$ 故 $B'\subset(A\cup B)'$

所以$A'\cup B'\subset(A\cup B)'$。因此我们只要证

$$(A\cup B)'\subset A'\cup B'。$$

现设 $p\notin A'\cup B'$；则 $\exists G, H\in\tau$ 使得

$$p\in G \quad 与 \quad G\cap A\subset\{p\}$$

及

$$p\in H \quad 与 \quad H\cap B\subset\{p\}$$

成立。但由此可得 $G\cap H\in\tau$，$p\in G\cap H$，因而

$$(G\cap H)\cap(A\cup B)=(G\cap H\cap A)\cup(G\cap H\cap B)$$
$$\subset(G\cap A)\cup(H\cap B)\subset\{p\}\cup\{p\}=\{p\},$$

于是 $p\notin(A\cup B)'$。所以 $(A\cup B)'\subset A'\cup B'$。

闭集、闭包运算、稠密集

18. 考察 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 上的拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}。$$

(i) 列出 X 的一切闭集。

(ii) 求 $\{a\}$，$\{b\}$ 及 $\{c, e\}$ 的闭包。

(iii) 试问(ii)中哪些集在 X 中稠密?

解：(i) 一个集为闭集的充要条件是它的余集为开集。因此把 τ 内每个集的余集写出如下：

$$\varnothing, X, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, e\}, \{e\}, \{c, d\}。$$

(ii) A 的闭包 $\bar{A}$ 是 A 的所有闭母集的交。$\{a\}$ 只有一个闭母集，是 X；$\{b\}$ 的闭母集是 $\{b, e\}$，$\{b, c, d, e\}$ 和 X；$\{c, e\}$ 的闭母集是 $\{c, d, e\}$，$\{b, c, d, e\}$ 和 X。于是

$$\overline{\{a\}}=X, \quad \overline{\{b\}}=\{b, e\}, \quad \overline{\{c, e\}}=\{c, d, e\}。$$

(iii) A 在 X 中稠密的充要条件是 $\bar{A}=X$；所以 $\{a\}$ 是 X 中唯一的稠密集。

19. 设 $\mathbf{N}$ 上的拓扑 τ 由 $\varnothing$ 及 $\mathbf{N}$ 的形如

$$E_n=\{n, n+1, n+2, \cdots\}$$

的子集所构成，其中 $n\in\mathbf{N}$（如习题 10）。

（i）写出 $\{\mathbf{N},\tau\}$ 的一切闭集。

（ii）求 $\{7,24,47,85\}$ 及 $\{3,6,9,12,\cdots\}$ 的闭包。

（iii）求 $\mathbf{N}$ 的在 $\mathbf{N}$ 中稠密的一切子集。

解：(i) 一个集为闭的充要条件是它的余集为开。因此列出 $\mathbf{N}$ 中的闭子集如下：

$\mathbf{N}$，$\varnothing$，$\{1\}$，$\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\cdots$，$\{1,2,\cdots,m\}$，$\cdots$

(ii) 一个集的闭包是它的最小的闭母集。所以

$$\overline{\{7,24,47,85\}}=\{1,2,\cdots,84,85\}$$

$$\overline{\{3,6,9,12,\cdots\}}=\{1,2,3,\cdots\}=\mathbf{N}。$$

(iii) 若 $\mathbf{N}$ 的子集 A 是无限集，亦即无界集，则 $\bar{A}=\mathbf{N}$，即 A 在 $\mathbf{N}$ 中稠密。若 A 是有限集，则它的闭包不是 $\mathbf{N}$，即 A 不在 $\mathbf{N}$ 中稠密。

20. 设 τ 是 $\mathbf{R}$ 上的拓扑，由 $\mathbf{R}$，$\varnothing$ 及一切形如 $E_a=(a,\infty)$ 的开区间所构成，其中 $a\in\mathbf{R}$。

（i）求 $(\mathbf{R},\tau)$ 的一切闭子集。

（ii）求集 $[3,7)$，$\{7,24,47,85\}$ 和 $\{3,6,9,12,\cdots\}$ 的闭包。

解：(i) 一个集为闭的充要条件是它的余集为开。因此 $(\mathbf{R},\tau)$ 的闭子集是 $\varnothing$，$\mathbf{R}$ 及一切闭的半无限区间

$$E_a^c=(-\infty,a]。$$

（ii）集的闭包是它的最小闭母集。因此

$$\overline{[3,7)}=(-\infty,7]，\overline{\{7,24,47,85\}}=(-\infty,85]$$

$$\overline{\{3,6,9,12,\cdots\}}=(-\infty,\infty)=\mathbf{R}。$$

21. 设 X 为离散拓扑空间，

（i）求 X 的任何子集 A 的闭包；

(ii) 求 X 的一切稠密子集。

解：(i) 我们知道在离散空间 X 内的任何集 $A\subset X$ 都是闭集，因此 $\bar{A}=A$。

(ii) A 在 X 中稠密的充要条件是 $\bar{A}=X$。但是 $\bar{A}=A$，所以 X 是 X 的唯一稠密子集。

22. 设 X 为非离散空间，

(i) 求 X 的一切闭子集；

(ii) 求 X 的任何子集 A 的闭包；

(iii) 求 X 的一切稠密子集。

解：(i) 我们知道非离散空间 X 中仅有的开集是 X 和 $\varnothing$；因此 X 所有的闭子集也是 X 和 $\varnothing$。

(ii) 若 $A=\varnothing$，则 $\bar{A}=\varnothing$。若 $A\neq\varnothing$，则 X 是 A 的唯一的闭母集，所以 $\bar{A}=X$。因此，对任何 $A\subset X$，得

$$\bar{A}=\begin{cases}\varnothing & \text{若 } A=\varnothing \\ X & \text{若 } A\neq\varnothing。\end{cases}$$

(iii) $A\subset X$ 在 X 中稠密的充要条件是 $\bar{A}=X$；因此 X 的任何非空子集都在 X 中稠密。

23. 求证定理 5.4：拓扑空间 X 的子集 A 为闭集的充要条件是 A 含有它的一切聚点，即 $A'\subset A$。

解：设 A 闭；又设 $p\notin A$；即 $p\in A^c$，则 A^c 作为闭集的余集因而是开集。于是因有开集 A^c 使得

$$p\in A^c \quad 及 \quad A^c\cap A=\varnothing$$

而知 $p\notin A'$，这说明若 A 闭则 $A'\subset A$。

现在假设 $A'\subset A$，来证明 A^c 是开的。为此设 $p\in A^c$，则 $p\notin A'$，于是有开集 G 使得

$$p\in G \quad 同时 \quad (G\setminus\{p\})\cap A=\varnothing。$$

但$p\notin A$，故由此得

$$G\cap A=(G\setminus\{p\})\cap A=\varnothing。$$

所以$G\subset A^c$，从而p是A^c的一个内点，这就证明了A^c是开的。

24. 求证：若F是集A的一个闭母集，则$A'\subset F$。

解：由习题15可知，若$A\subset F$则$A'\subset F'$。但因F闭，故由定理5.4知$F'\subset F$。于是$A'\subset F'\subset F$。由此得$A'\subset F$。

25. 求证$A\cup A'$是闭集。

解：设$p\in(A\cup A')^c$。因$p\notin A'$，故有开集G使

$$p\in G \quad 同时 \quad G\cap A=\varnothing 或 \{p\}$$

但 $\qquad p\notin A$，故 $G\cap A=\varnothing$。

下面将证：也有$G\cap A'=\varnothing$ 设$g\in G$。则因G是开集，而且有

$$g\in G \quad 而 \quad G\cap A=\varnothing。$$

故$g\notin A'$，所以$G\cap A'=\varnothing$

以上论证说明

$$G\cap(A\cup A')=(G\cap A)\cup(G\cap A')=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing。$$

因此 $G\subset(A\cup A')^c$，这说明p是$(A\cup A')^c$的一个内点。而p是$(A\cup A')^c$中的任意一点，故由此知$(A\cup A')^c$是开集。亦即$A\cup A'$是闭集。

26. 求证定理5.6：$\bar{A}=A\cup A'$。

解：因$A\subset\bar{A}$而$\bar{A}$为闭，故$A'\subset(\bar{A})'\subset\bar{A}$，从而

$$A\cup A'\subset\bar{A}。$$

但$A\cup A'$是含A的一个闭集，故$\bar{A}\subset A\cup A'$ 合起来得$\bar{A}=A\cup A'$。

27. 求证：若$A\subset B$，则$\bar{A}\subset\bar{B}$。

解：若 $A\subset B$，则由习题15得 $A'\subset B'$。故 $A\cup A'\subset B\cup B'$。于是由上题得 $\bar{A}\subset\bar{B}$。

28．求证：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

解：由上题得 $\bar{A}\subset\overline{A\cup B}$ 及 $\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$，从而 $(\bar{A}\cup\bar{B})\subset\overline{A\cup B}$。但 $(A\cup B)\subset(\bar{A}\cup\bar{B})$。而 $\bar{A}\cup\bar{B}$ 是两个闭集的并，所以是闭集。因此（命题5.5）$(\bar{A}\cup\bar{B})\subset\overline{A\cup B}\subset(A\cup B)$。由此得 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

29．求证命题5.7：

（i）$\bar{\varnothing}=\varnothing$，　　　　（ii）$A\subset\bar{A}$，

（iii）$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，　　（iv）$(A^-)^-=A^-$。

证：(i) 与(iv)是因为 $\varnothing$ 与 A^- 都是闭集，因此它们的闭包就是它们本身。

（ii）$A\subset A\cup A'=\bar{A}$（习题26）。

（iii）习题28。

内集、外集、边界

30．考察 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 上的拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}。$$

（i）求 X 的子集 $A=\{a, b, c\}$ 的一切内点。

（ii）求 A 的一切外点。

（iii）求 A 的一切边界点。

解：(i) a 和 b 是 A 的内点，因为

$$a, b\in\{a, b\}\subset A=\{a, b, c\}$$

其中 $\{a, b\}$ 是一个开集，就是说，它们属于一个含在 A 内的开集，所以是 A 的内点。注意 c 不是 A 的内点，因为 c 不属

于任何一个含在A内的开集。因此$\operatorname{int}(A)=\{a, b\}$是$A$的内集。

(ii) A的余集为$A^c=\{d, e\}$，d和e都不是A^c的内点，因为两者都不属于$A^c=\{d, e\}$的任何一个开子集。因此$\operatorname{int}(A^c)=\varnothing$，即$A$的外点不存在。

(iii) A的边界$b(A)$由既不是A的内点又不是A的外点的那些点所构成，因此$b(A)=\{c, d, e\}$。

31．求证命题5.8：集A的内集是含在A内的一切开集之并。此外再证

(i) A°是开集。

(ii) A°是A的最大的开子集，即若G是含在A中的开集，则$G\subset A^\circ\subset A$。

(iii) A是开集的充要条件为$A=A^\circ$。

解：设$\{G_i\}$是A的一切开子集所构成的组。若$x\in A^\circ$，则$x\in A$的某个开子集，即有i_0使$x\in G_{i_0}$，因此$x\in\bigcup_i G_i$，从而$A^\circ\subset\bigcup_i G_i$。另一方面，若$y\in\bigcup_i G_i$，则有$i_1$使$y\in G_{i_1}$，因此$y\in A^\circ$，于是$\bigcup_i G_i\subset A^\circ$。

合起来得
$$A^\circ=\bigcup_i G_i.$$

(i) $A^\circ=\bigcup_i G_i$作为开集之并，它是开的。

(ii) 若G是A的一个开子集，则$G\in\{G_i\}$，从而
$$G\subset\bigcup_i G_i=A^\circ\subset A.$$

(iii) 若A是开集，则$A\subset A^\circ\subset A$，从而$A=A^\circ$。若$A=A^\circ$，则因$A^\circ$是开的，所以$A$是开的。

32．设A为一个不可分空间X的非空真子集。求A的内集，外集和边界。

解：不可分空间X中只有X与$\varnothing$是开集，因 $X\neq A$，故$\varnothing$是 A 的仅有的开子集；因此 $\text{int}(A)=\varnothing$。

类似地，$\text{int}(A^c)=\varnothing$，即 A 的外集为空集。于是

$$b(A)=X_{\circ}$$

33．设 $\mathbf{R}$ 上的拓扑 τ 由 $\mathbf{R}$，$\varnothing$与一切开的无限区间$E_a=(a,\ \infty)$所构成，其中 $a\in\mathbf{R}$。求闭无限区间 $A=[7,\ \infty)$ 的内集、外集与边界。

解：因为 A 的内集是 A 的最大开子集，故

$$\text{int}(A)=(7,\ \infty)。$$

注意 $A^c=(-\infty,\ 7)$ 除$\varnothing$外不含开集；故

$$\text{int}(A^c)=\text{ext}(A)=\varnothing。$$

A 的边界是由不属于 $\text{int}(A)$ 或 $\text{ext}(A)$ 的这些点所构成的，故 $b(A)=(-\infty,\ 7]$。

34．求证定理 5.9：$\bar{A}=\text{int}(A)\cup b(A)$

解：因 $X=\text{int}(A)\cup b(A)\cup\text{ext}(A)$，故

$$\text{int}(A)\cup b(A))^c=\text{ext}(A),$$

所以只须证：

$$(\bar{A})^c=\text{ext}(A)。$$

设 $p\in\text{ext}(A)$，则有开集G使 $p\in G\subset A^c$。由此得

$$G\cap A=\varnothing。$$

所以 p 不是 A 的聚点，亦即 $p\notin A'$。而 $p\notin A$ 故

$$p\notin A\cup A'=\bar{A},\quad 即\quad p\in(\bar{A})^c,$$

由此得
$$\text{ext}(A)\subset(\bar{A})^c。$$

现设$p\in(\bar{A})^c=(A\cup A')^c$，则 $p\in A'$，从而有开集G使 $p\in G$ 同时
$$(G\setminus\{p\})\cap A=\varnothing。$$

但也有 $p\notin A$，故 $G\cap A=\varnothing$，从而 $p\in G\subset A^c$，于是

$$p \in \operatorname{ext}(A)。$$

合起来，得 $\operatorname{ext}(A)=(\bar{A})^c$。

35．设已给二函数 f 与 g，其定义如下：$f(A)=\operatorname{int}(A)$ 即把集 A 变为 A 的内集；$g(A)=\bar{A}$，即把集 A 变为 A 的闭包。试用反例证明 f 与 g 是不可交换的。

解：设实数集 $\mathbf{R}$ 赋予通常拓扑。考察其子集 $\mathbf{Q}$（有理数集）。从例 5.3 知 $\mathbf{Q}$ 的内集不空，因此

$$(g\circ f)(\mathbf{Q})=g(f(\mathbf{Q}))=g(\operatorname{int}(\mathbf{Q}))$$
$$=g(\varnothing)=\overline{\varnothing}=\varnothing。$$

另一方面，$\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 的内集是 $\mathbf{R}$ 本身，故

$$(f\circ g)(\mathbf{Q})=f(g(\mathbf{Q}))=f(\overline{\mathbf{Q}})$$
$$=f(\mathbf{R})=\mathbf{R}。$$

于是 $g\circ f\neq f\circ g$，即 f 与 g 不可交换。

邻域、邻域系

36．考察 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 上的拓扑：

$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$。

(i) 写出点 e 的一切邻域，(ii) 写出点 c 的一切邻域。

解：(i) 所谓一点的邻域是指含这点的开集的任何母集。含 e 的开集是 $\{a, b, e\}$ 和 X。$\{a, b, e\}$ 的母集是 $\{a, b, e\}$，$\{a, b, c, e\}$，$\{a, b, d, e\}$ 和 X。X 的母集只有 X。从而 e 的邻域组，即 e 的邻域系是

$\mathscr{N}_e=\{\{a, b, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, X\}$。

(ii) 含 c 的开集是 $\{a, c, d\}$，$\{a, b, c, d\}$ 和 X。因此 c 的邻域系是

$\mathscr{N}_c=\{\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, X\}$。

37. 求不可分空间 X 中的一点 p 的邻域系。

解：X 中仅有的开集是 X 与 $\varnothing$，故含 p 的开集只有 X。此外，X 的母集只有 X，故 $\mathscr{N}_p=\{X\}$。

38. 求证：一点 p 的任何两个邻域 N 与 M 的交 $N\cap M$ 仍为 p 的一个邻域

解：因 N 和 M 是 p 点的邻域，故有开集 G，H 使

$$p\in G\subset N; \quad p\in H\subset M$$

因此 $p\in G\cap H\subset N\cap M$，而 $G\cap H$ 是开集，故 $N\cap M$ 是 p 点的一个邻域。

39. 求证：p 点的一个邻域 N 的任何母集 M 也是 p 的一个邻域。

解：N 是 p 的一个邻域，故有开集 G 存在，使 $p\in G\subset N$。由假设，$N\subset M$，故 $p\in G\subset N\subset M$。由此得 $p\in G\subset M$。这说明 M 也是 p 的一个邻域。

40. 在实直线 $\mathbf{R}$ 的通常拓扑下，下列诸区间是否 0 的一个邻域？

(i) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$； (ii) $(-1, 0]$；

(iii) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$； (iv) $(0, 1]$。

解：(i) 注意 $0\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\subset\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，而 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 是开集，故 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 是 0 的一个邻域。

(ii)和(iii)：任何含 0 的 $\mathscr{U}$-开集 G 必包含一个含 0 的开区间 (a, b)，即：$a<0<b$；因此 G 必同时含有大于 0 和

小于 0 的两个点。故 $(-1, 0]$ 及 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 都不是 0 点的邻域。

(iv) 区间 $(0, 1]$ 不包含 0，故不是 0 点的邻域。

41．求证：集 G 是开集的充要条件是它是它的每一点的一个邻域。

解：假设 G 是开集；则每个点 $p\in G$ 属于包含在 G 内的开集 G，因此 G 是它的每一点的一个邻域。

反之，假设 G 是它的每一点的一个邻域，则对于每点 $p\in G$，有开集 G_p 存在，使得 $p\in G_p\subset G$。因此

$$G=\bigcup\{G_p: p\in G\}$$

是开集，因为它是开集的并。

42．求证命题 5.10：设 $\mathscr{N}_p$ 为拓扑空间 X 中一点 p 的邻域系，则

(i) $\mathscr{N}_p$ 不空，而且 p 属于 $\mathscr{N}_p$ 中的每个元素，

(ii) $\mathscr{N}_p$ 中任何两个元素之交仍属于 $\mathscr{N}_p$，

(iii) $\mathscr{N}_p$ 中一个元素的任何母集都属于 $\mathscr{N}_p$，

(iv) 每个 $N\in\mathscr{N}_p$ 都含某一个这样的 $G\in\mathscr{N}_p$：G 是它的每一点的一个邻域。

解：(i) 若 $N\in\mathscr{N}_p$，则有开集 G 存在，使 $p\in G\subset N$。因而 $p\in N$。对任何一点 $p\in X$，因 X 是开集，故 $X\in\mathscr{N}_p$，所以 $\mathscr{N}_p\neq\varnothing$。

(ii) 即习题 38。

(iii) 即习题 39。

(iv) 若 $N\in\mathscr{N}_p$，则 N 是 p 的一个邻域，故有开集 G，使 $p\in G\subset N$。但由上题，$G\in\mathscr{N}_p$，并且是它的每一点的一个邻域。

子空间与相对拓扑

43．考察 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 上的拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

试列出 $A=\{a, c, e\}$ 上的相对拓扑 τ_A 的一切元素。

解：$\tau_A=\{A\cap G: G\in\tau\}$，故 τ_A 的元素是：

$A\cap X=A$, $A\cap\{a\}=\{a\}$, $A\cap\{a, c, d\}=\{a, c\}$

$A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cap\{a, b\}=\{a\}$, $A\cap\{a, b, c, d\}=\{a, c\}$

$A\cap\{a, b, e\}=\{a, e\}$

换句话说，$\tau_A=\{A, \varnothing, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$。注意$\{a, c\}$不是 X 中开集，但是 A 中的相对开集，即是 τ_A-开集。

44．考察实直线 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑 $\mathscr{U}$，试描述正整数集 $\mathbf{N}$ 上的相对拓扑。

解：注意：对每个正整数 $n_0\in\mathbf{N}$ 有

$$\{n_0\}=\mathbf{N}\cap\left(n_0-\frac{1}{2}, n_0+\frac{1}{2}\right)$$

而 $\left(n_0-\frac{1}{2}, n_0+\frac{1}{2}\right)$ 是一个 $\mathscr{U}$-开集，这说明 $\mathbf{N}$ 中任何一个单元素集 $\{n_0\}$ 都是 $\mathbf{N}$ 的一个相对开集。从而 $\mathbf{N}$ 的任何子集也都是相对于 $\mathbf{N}$ 的开集（因为它是单元素集之并）。这就是说 $\mathscr{U}_N$ 就是 $\mathbf{N}$ 上的离散拓扑。

45．设 A 是(X, τ)的一个 τ-开子集，又设 $A\subset Y\subset X$。求证：A 也是 Y 的一个 τ_Y-开集，即它对于 Y 上的相对拓扑说来也是开集。

解：$\tau_Y=\{Y\cap G: G\in\tau\}$，但 $A\subset Y$ 及 $A\in\tau$ 故

$$A=Y\cap A\in\tau_Y.$$

46. 考察实直线 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑 $\mathscr{U}$，试问下列各集相对于 $I=[0,1]$ 是否为开集，即是否为 τ_I-开集。

(i) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$，(ii) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$，(iii) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$。

解：(i) 注意 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]=I\cap\left(\frac{1}{2}, 3\right)$，而 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 内开集，因此 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 是 I 的相对开集。

(ii) 因 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 内的开集，即 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)\in\mathscr{U}$，故由上题知它是 I 的相对开集：$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)=I\cap\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$。

(iii) 因 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 不是 I 同任何 $\mathbf{R}$ 的 $\mathscr{U}$-开子集的交，故它不是 $\mathscr{U}_I$-开集。

47. 设 A 为拓扑空间 (X, τ) 的子集。求证相对拓扑 τ_A 是合理地定义了的(well-defined)。换句话说，求证：

$$\tau_A=\{A\cap G: G\in\tau\}$$

是 A 上的一个拓扑。

解：因 τ 是拓扑，故 X 与 $\varnothing$ 属于 τ，从而 $A\cap X=A$ 与 $A\cap\varnothing=\varnothing$ 均属于 τ_A。这说明 τ_A 满足 $[O_1]$。

现设 $\{H_i: i\in I\}$ 是 τ_A 的一个子组，则由 τ_A 的定义知：对每个 $i\in I$，有 τ-开集 G_i 存在使 $H_i=A\cap G_i$。于是由关于与交作并的分配律得到

$$\bigcup_i H_i=\bigcup_i(A\cap G_i)=A\cap(\bigcup_i G_i),$$

但 $\bigcup_i G_i$ 作为 τ-开集之并，它是 τ-开集，因此 $\bigcup_i H_i\in\tau_A$。这说明 τ_A 满足 $[O_2]$。

现设 H_1，$H_2\in\tau_A$，则有 G_1，$G_2\in\tau$ 使

$$H_1=A\cap G_1,\qquad H_2=A\cap G_2。$$

但因 τ 是一个拓扑，故

$$G_1\cap G_2\in\tau。$$

从而
$$\begin{aligned}H_1\cap H_2&=(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)\\&=A\cap(G_1\cap G_2)\in\tau_A。\end{aligned}$$

这说明 τ_A 满足 $[O_3]$。因此也就证明了 τ_A 是 A 上的一个拓扑。

48. 设 (X,τ) 是 (Y,τ^*) 的一个子空间，(Y,τ^*) 又是 (Z,τ^{**}) 的一个子空间。求证 (X,τ) 也是 (Z,τ^{**}) 的一个子空间。

解：因为 $X\subset Y\subset Z$，故 (X,τ) 是 (Z,τ^{**}) 的子空间的充要条件是 $\tau_X^{**}=\tau$。

设 $G\in\tau$，则因 $\tau=\tau_X^*$，故有 $G^*\in\tau_X^*$ 使 $G=X\cap G^*$，又因 $\tau^*=\tau_Y^{**}$，故有 $G^{**}\in\tau_Y^{**}$ 使 $G^*=Y\cap G^{**}$。因此，由于 $X\subset Y$ 而有

$$G=X\cap G^*=X\cap Y\cap G^{**}=X\cap G^{**}。$$

于是 $G\in\tau_X^{**}$。这说明 $\tau\subset\tau_X^{**}$。

现设 $G\in\tau_X^{**}$，即有 $H\in T^{**}$ 使 $G=X\cap H$。但

$$Y\cap H\in\tau_Y^{**}=\tau^*\quad 故\quad X\cap(Y\cap H)\in\tau_X^*=\tau。$$

于是由 $X\cap(Y\cap H)=X\cap H=G$ 得 $G\in\tau$。因此 $\tau_X^{**}\subset\tau$。这样，定理就得到了证明。

杂题

49. 设 $\mathscr{P}(X)$ 是非空集 X 的势集，即由非空集 X 的全体子集所构成的集组。又设 k：$\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$ 是一个恒等

映射，即对于每个 $A\subset X$ 有 $k(A)=A$。

（i）证明 k 满足定理5.12中的 Kuratouski 闭包公理。

（ii）求 X 上由 k 导出的拓扑。

解：(i) $k(\varnothing)=\varnothing$，所以$[K_1]$得到满足。

$k(A)=A\supset A$，所以$[K_2]$得到满足。

$k(A\cup B)=A\cup B=k(A)\cup k(B)$，所以$[K_3]$得到满足。

$k(k(A))=k(A)$，所以$[K_4]$得到满足。

(ii) 在 k 的导出拓扑下，一个集 $F\subset X$ 为闭集的充要条件是 $k(F)=F$。但是对任何 $A\subset X$ 有 $k(A)=A$，所以 X 中的任何集都是闭集。因此 k 导出的拓扑是离散拓扑。

50. 设 τ 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的有限余拓扑，又设$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$是 $\mathbf{R}$ 内的数列，它的项两两不同。求证$\langle a_n\rangle$收敛于每一个实数 $p\in\mathbf{R}$。

解：设 G 是任何一个含 $p\in\mathbf{R}$ 的开集。由有限余拓扑的定义可知 G^c 是一个有限集，因$\langle a_n\rangle$中的项两两不同，故 G^c 只包含数列$\langle a_n\rangle$中的有限多项。于是G包含数列$\langle a_n\rangle$的几乎所有的项，所以$\langle a_n\rangle$收敛于 p。

51. 设 $\mathbf{T}$ 是非空集 X 上一切拓扑所构成的簇。这个簇按组包含关系成部分序簇。求证 $\mathbf{T}$ 是一个格 (lattice)，即若 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{T}$ 的一个非空子簇，则 $\sup(\mathbf{S})$ 及 $\inf(\mathbf{S})$ 存在。

解：设 $\tau_1=\bigcap\{\tau: \tau\in\mathbf{S}\}$，则由定理5.1知，$\tau_1$ 是一个拓扑；所以 $\tau_1\in\mathbf{T}$ 且 $\tau_1=\inf(\mathbf{S})$。

现在设 $\mathbf{B}$ 是由 $\mathbf{S}$ 的所有上界所构成的簇。注意 $\mathbf{B}$ 是非空的，因为，例如说，X 上的离散拓扑 $\mathscr{D}$ 属于 $\mathbf{B}$。设

$\tau_2=\bigcap\{\tau:\tau\in \mathbf{B}\}$。则也是由定理 5.1 可知，$\tau_2$ 是 X 上的拓扑。另外还有 $\tau_2=\sup(\mathbf{S})$。

52. 设 X 是一个非空集。对于每点 $p\in X$，令 $\mathscr{A}_p$ 表示由 X 中所有含 p 的子集所构成的组。

(i) 求证 $\mathscr{A}_p$ 满足定理 5.11 的邻域公理。

(ii) 求 X 上的导出拓扑。

解：(i) 因为 $p\in X$, $X\in\mathscr{A}_p$，所以 $\mathscr{A}_p\neq\varnothing$。由假设，$p$ 属于 $\mathscr{A}_p$ 的每个集，所以[A_1]得到满足。

若 $M, N\in\mathscr{A}_p$，则 $p\in M$ 及 $p\in N$，所以 $p\in M\cap N$。因此 $M\cap N\in\mathscr{A}_p$，所以[A_2]得到满足。

若 $N\in\mathscr{A}_p$ 且 $N\subset M$，即若 $p\in N\subset M$，则 $p\in M$。因此 $M\in\mathscr{A}_p$，所以[A_3]得到满足。

由 $\mathscr{A}_p$ 的定义，每个 $A\subset X$ 具有性质：对于每个 $p\in A$ 都有 $A\in\mathscr{A}_p$，所以[A_4]得到满足。

(ii) 在导出拓扑下一个集 $A\subset X$ 是开集的充要条件是对每个 $p\in A$ 有 $A\in\mathscr{A}_p$。因为 X 的每个子集都有这个性质，所以 X 上的导出拓扑是离散拓扑。

补 充 习 题

拓扑空间

53. 列出集合 $X=\{a, b\}$ 上的所有可能的拓扑。

54. 证明定理 5.1：设 $\{\tau_i: i\in I\}$ 是集合 X 上的某拓扑集，则 $\bigcap_i \tau_i$ 也是 X 上的一个拓扑。

55. 设 X 是一个无限集，并设 τ 是 X 上的一个拓扑，其中 X 的所有无限子集皆开，试证明 τ 是 X 上的离散拓扑。

56. 设 X 是一个无限集并设 τ 由 $\varnothing$ 与 X 的所有余集为可数集的子集所组成。

(i) 证明 (X, τ) 是一个拓扑空间。

(ii) 如果 X 是可数的，试叙述由 τ 所决定的拓扑。

57. 设 $\tau=\{\mathbf{R}^2, \varnothing\}\cup\{G_k, k\in\mathbf{R}\}$ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 的子集类，其中 $G_k=\{\langle x, y\rangle: x, y\in\mathbf{R}, x>y+k\}$。

(i) 证明 τ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个拓扑。

(ii) 如果"$k\in\mathbf{R}$"由"$k\in\mathbf{N}$"代替 τ 是否是一个拓扑？如果由"$k\in\mathbf{Q}$"代替怎么样？

58. 证明 $(\mathbf{R}^2, \tau)$ 是一个拓扑空间，其中 τ 的元素是 $\varnothing$ 与有限条线和有限个点的余集。

59. 设 $\{p\}$ 是任一个使 $p\notin\mathbf{R}$ 的单点集，例如 $\{\mathbf{R}\}$。又设 $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cup\{p\}$，并设 τ 是 $\mathbf{R}^*$ 的子集组，它包含 $\mathbf{R}$ 的所有 $\mathscr{U}$-开子集及 $\mathbf{R}$ 的所有有界的 $\mathscr{U}$-闭子集(关于 $\mathbf{R}^*$)的余集。求证 τ 是 $\mathbf{R}^*$ 上的一个拓扑。

60. 设 $\{p\}$ 是任一使 $p\notin\mathbf{R}$ 的单元素集；并设

$$\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cup\{p\}。$$

再设 τ 为 $\mathbf{R}^*$ 的子集组，它包含 $\mathbf{R}$ 的所有子集和 $\mathbf{R}$ 的所有有限子集（关于 $\mathbf{R}^*$）的余集。求证 τ 是 $\mathbf{R}^*$ 上的一个拓扑。

聚点，导集

61. 求证：$A'\cup B'=(A\cup B)'$。

62. 求证：若 p 是集 A 的一个极限点，则 p 也是 $A\setminus\{p\}$ 的一个极限点。

63. 求证：设 X 是一个有限余拓扑空间，则对 X 的任一子集 A 来说，A' 是闭的。

64．考虑拓扑空间$(\mathbf{R}, \tau)$，其中τ包含$\mathbf{R}$，$\varnothing$及所有开的无限区间$E_a=(a, \infty)$，$a\in\mathbf{R}$。求下面各集的导集：

（i）区间$[4, 10]$；　　（ii）整数集$\mathbf{Z}$。

65．设τ为习题59中所定义的$\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cup\{p\}$上的拓扑。

(i) 确定下列集合的聚点：(1)开区间(a, b)，$a, b\in\mathbf{R}$；(2) 无限开区间(a, ∞)，$a\in\mathbf{R}$；(3) $\mathbf{R}$。

(ii) 确定$\mathbf{R}^*$中那些以p为极限点的子集。

66．设τ_1与τ_2为集X上的拓扑，τ_1粗于τ_2，即$\tau_1\subset\tau_2$。

（i）求证X的子集A的每一τ_2聚点也是一个τ_1聚点。

（ii）构造一个使(i)的逆命题不成立的例子。

闭集，集合的闭包，稠密子集

67．试构造一个使闭集与开集恒同的非离散拓扑空间。

68．求证：$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$，并构造一个使等式不成立的例子。

69．求证：$\bar{A}\setminus\bar{B}\subset\overline{(A\setminus B)}$，并构造一个使等式不成立的例子。

70．求证：若A是开集，则$A\cap\bar{B}\subset\overline{A\cap B}$。

71．求证：设A是(X, τ)的稠密子集，又设B是X的一非空开子集，则$A\cap B\neq\varnothing$。

72．设τ_1与τ_2是X上的拓扑，τ_1粗于τ_2，求证X的任一子集A的τ_2-闭包包含在A的τ_1-闭包内。

73．求证一个无限的有限余空间X的每一非有限子集在X中是稠密的。

74．求证一个不可分空间X的每一非空开子集在X中稠密。

内集、外集、边界

75．设X是离散空间，又设$A\subset X$，求 (i) $\mathrm{int}(A)$，(ii) $\mathrm{ext}(A)$，(iii) $b(A)$。

76．求证：(i) $b(A)\subset A$ 当且仅当A是闭的。

(ii) $b(A)\cap A=\varnothing$当且仅当A是开的。

(iii) $b(A)=\varnothing$当且仅当A既开又闭。

77．求证：若$\bar{A}\cap\bar{B}=\varnothing$，则$b(A\cup B)=b(A)\cup b(B)$。

78．求证：(i) $A^\circ\cap B^\circ=(A\cap B)^\circ$；

(ii) $A^\circ\cup B^\circ\subset(A\cup B)^\circ$。

试构造一个使(ii)中的等式不成立的例子。

79．求证：$b(A^\circ)\subset b(A)$。试构造一个使等式不成立的例子。

80.*求证：$\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{ext}(A)$在$X$中不必稠密（当$X=\mathbf{R}$时是正确的）。

81．求证：设τ_1与τ_2为X上的拓扑，τ_1粗于τ_2，即$\tau_1\subset\tau_2$又设$A\subset X$，则

(i) A的τ_1-内集是A的τ_2-内集的子集。

(ii) A的τ_2-边界是A的τ_1-边界的子集。

邻域、邻域系

82．设X是一有限余拓扑空间，求证点$p\in X$的每一邻域是一开集。

83．设X是一个不可分空间，试确定任一点$p\in X$的邻域系$\mathscr{N}_p$。

84．求证若$\mathscr{N}_p$是有限的，则$\cap\{N：N\in\mathscr{N}_p\}$属于$\mathscr{N}_p$。

* 译注：本题在第一版中有误，现据第二版改正。

子空间，相对拓扑

85. 求证离散空间的每一子空间也是离散的。

86. 求证不可分空间的每一子空间也是不可分的。

87. 设(Y, τ_Y)是(X, τ)的一个子空间，求证$E\subset Y$是τ_Y-闭的，当且仅当$E=Y\cap F$，其中F是X的τ-闭子集。

88. 设(A, τ_A)是(X, τ)的一个子空间。求证τ_A由包含在A中的τ的元素组成，即$\tau_A=\{G: G\subset A, G\in\tau\}$，当且仅当$A$是$X$的一个$\tau$-开子集。

89. 设(Y, τ_Y)是(X, τ)的一个子空间，对Y的任一子集A，设$\bar{A}$与A°是A关于τ的闭包和内集，并设$(\bar{A})_Y$与$(A^\circ)_Y$是A关于τ_Y的闭包和内集，求证：

(i) $(\bar{A})_Y=\bar{A}\cap Y$，　　(ii) $A^\circ=(A^\circ)_Y\cap Y^\circ$。

90. 设A, B与C是拓扑空间X的子集，具有关系$C\subset A\cup B$。若对A, B和$A\cup B$赋以相对拓扑，求证C关于$A\cup B$是开的，当且仅当$C\cap A$关于A是开的，$C\cap B$关于B是开的。

拓扑的等价定义

91. 求证定理5.11：设X是一非空集，又设对每点$p\in X$指定X的一个子集组$\mathscr{A}_p$与之对应，而这个集组$\mathscr{A}_p$满足下列四条公理：

[A_1] $\mathscr{A}_p$不空，而p属于$\mathscr{A}_p$的每一个元素。

[A_2] $\mathscr{A}_p$的任两个元素的交属于$\mathscr{A}_p$。

[A_3] $\mathscr{A}_p$的元素的每一母集属于$\mathscr{A}_p$。

[A_4] 每一元素$N\in\mathscr{A}_p$是元素$G\in\mathscr{A}_p$的一个母集，使

对每一 $g\in G$ 有 $G\in\mathscr{A}_g$。

则 X 上有一个且只有一个拓扑 τ，使 $\mathscr{A}_p$ 是点 $p\in X$ 的 τ-邻域系。

92. 求证定理 5.12：设 X 是一个非空集，又设

$$k:\ \mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$$

满足下面的四条 Kuratouski 闭包公理：

[K_1] $k(\varnothing)=\varnothing$，　　[$K_2$] $A\subset k(A)$，

[K_3] $k(A\cup B)=k(A)\cup k(B)$，[K_4] $k(k(A))=k(A)$，

则 X 上有一个且只有一个拓扑 τ 使 $k(A)$ 是 $A\subset X$ 的 τ-闭包。

93. 求证：设 X 是一个非空集，又设 i：$\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$ 满足如下性质：

(i) $i(X)=X$，　　(ii) $i(A)\subset A$，

(iii) $i(A\cup B)=i(A)\cup i(B)$，　(iv) $i(i(A))=i(A)$，

则 X 上有一个且只有一个拓扑 τ，使得 $i(A)$ 是 $A\subset X$ 的 τ-内集。

94. 求证：设 X 是一个非空集，又设 $\mathscr{F}$ 是满足如下性质的 X 的子集组：

(i) X 与 $\varnothing$ 属于 $\mathscr{F}$，

(ii) $\mathscr{F}$ 的任意多个元素的交属于 $\mathscr{F}$，

(iii) $\mathscr{F}$ 的任何两个元素的并属于 $\mathscr{F}$，

则 X 上有一个且仅有一个拓扑 τ，使 $\mathscr{F}$ 的元素恰好是 X 的 τ-闭子集。

95. 设实数 $p\in\mathbf{R}$ 的一个邻域是任一包含 p 与开区间 (a, b) 中所有有理数的集合，其中 $a<p<b$。

(i) 求证这些邻域实际上满足邻域公理，因面定义实

直线 **R** 上的一个拓扑。

(ii) 求证任一无理数集不含任何聚点。

(iii) 求证任一无理数列，如 $\langle \pi/2, \pi/3, \pi/4, \cdots \rangle$，不收敛。

补充习题答案

53. $\{X, \varnothing\}$, $\{X, \{a\}, \varnothing\}$, $\{X, \{b\}, \varnothing\}$ 与 $\{X, \{a\}, \{b\}, \varnothing\}$。

56. (ii) 离散拓扑。

64. (i) $(-\infty, 10]$, (ii) **R**。

65. (i): (1) $[a, b]$, (2) $[a, \infty) \cup \{p\}$, (3) $\mathbf{R}^*$。(ii) **R** 的无界子集。

67. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \varnothing, \{a, b\}, \{c\}\}$。

75. (i) A, (ii) A^c, (iii) $\varnothing$。

80. 设 $X = \{a, b\}$ 是一个不可分空间，又设 $A = \{a\}$。

第六章 基与准基

拓扑的基（Base for a topology）

设 (X, τ) 为一拓扑空间，$\mathscr{B}$为X的一个开集组，即 $B \subset \tau$，若

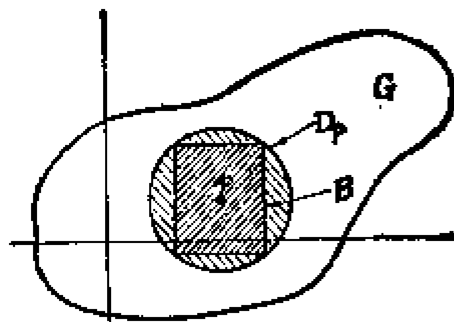
(i) 每个开集 $G \in \tau$ 都可表示为$\mathscr{B}$中某些集的并，则称$\mathscr{B}$为拓扑 τ 的一个**基**（base）。

换个说法，也可叙述如下：若

(ii) 对开集G的任何一点 p，都有 $B \in \mathscr{B}$ 存在，使 $p \in B \subset G$，则称$\mathscr{B}$为 τ 的一个基。

例 1.1 实直线 $\mathbf{R}$ 上的一切开区间所构成的组是 $\mathbf{R}$ 上通常拓扑的一个基。因若 $G \subset \mathbf{R}$ 是开集，同时 $p \in G$，则由开集的定义知有开区间(a, b)使 $p \in (a, b) \subset G$。

例 1.2 $\mathbf{R}^2$ 上一切以平行于 x 轴和 y 轴的线段为边的矩形所成的组$\mathscr{B}$也构成 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑的一个基。因设 $G \subset \mathbf{R}^2$ 是开集，同时 $p \in G$，则有以 p 为中心的开盘 D_p 使 $p \in D_p \subset G$，则如图所示的开矩形 B(其四点在圆周上)满足



$$p \in B \subset D_p \subset G \Longrightarrow p \in B \subset G。$$

故$\mathscr{B}$满足前面的(ii)。所以$\mathscr{B}$是一个基。

例 1.3 考察任何离散空间 $(X, \mathscr{D})$，则X上一切单元

素集所成的组 $\mathscr{B}=\{\{p\}: p\in X\}$ 是X上离散拓扑$\mathscr{D}$的一个基。这是因为每个单元素集 $\{p\}$ 都是一个 $\mathscr{D}$-开集，因为每个 $A\subset X$ 是$\mathscr{D}$-开的，而每个集都是单元素集的并。事实上还可知道，X的任何其他子集组 $\mathscr{B}^*$ 成为$\mathscr{D}$的一个基的充要条件是它是$\mathscr{B}$的母组，即 $\mathscr{B}^*\supset\mathscr{B}$。

现在问：已给集X上的集组$\mathscr{B}$，在何条件下$\mathscr{B}$能成为X上某个拓扑的基？显然必须有 $X=\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$，这是因为在$X$上的任何拓扑中，$X$ 都是一个开集。但下面的例子说明，仅此一个条件还不是充分的。

例 1.4 设 $X=\{a, b, c\}$，则集组 $\mathscr{B}=\{\{a, b\},\{b, c\}\}$ 不能成为X上任何拓扑的一个基，因为倘若$\mathscr{B}$是X上某一拓扑的一个基的话，则 $\{a, b\}$ 与 $\{b, c\}$ 都是开集，它们的交 $\{a, b\}\cap\{b, c\}=\{b\}$也将是开集，但$\{b\}$不是$\mathscr{B}$的元素之并。

下面的定理给出一个集组成为某个拓扑的基的充要条件。

定理 6.1 设$\mathscr{B}$是非空集X上的一个集组，则$\mathscr{B}$成为X上某个拓扑的一个基的充要条件是它具备下列二个性质：

(i) $X=\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$；

(ii) $\mathscr{B}$中任何二集 B 与 B^* 的交 $B\cap B^*$ 是$\mathscr{B}$中的某些集之并。换种说法，也就是：若 $p\in B\cap B^*$，则 $\exists B_p\in\mathscr{B}$ 使 $p\in B_p\subset B\cap B^*$。

例 1.5 设$\mathscr{B}$为实直线 $\mathbf{R}$ 上一切左开右闭区间所构成的组：

$$\mathscr{B}=\{(a, b]: a, b\in\mathbf{R}, a<b\}$$

则显然有 $\mathbf{R}=\bigcup\{(a, b]: (a, b]\in\mathscr{B}\}$，因为每个实数必属于某个左开右闭区间。另外，任何两个左开右闭区间之交或为空集或为另一个左开右闭区间。例如

若 $a<c<b<d$，则 $(a, b]\cap(c, d]=(c, b]$，如下图所示：



因此令 τ 表示一切可以表示为左开右闭区间之并的集所构成的集组，则 τ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑，这个拓扑称为 $\mathbf{R}$ 上的**上极限拓扑** (upper limit topology)，$\mathscr{B}$是它的一个基。注意 $\tau\neq\mathscr{U}$。

类似地，左闭右开区间组：

$$\mathscr{B}^*=\{[a, b): a, b\in\mathbf{R}, a<b\}$$

也是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑 τ^* 的基，这个拓扑称为 $\mathbf{R}$ 上的**下极限拓扑**(lower limit topology)。

准基 (Subbases)

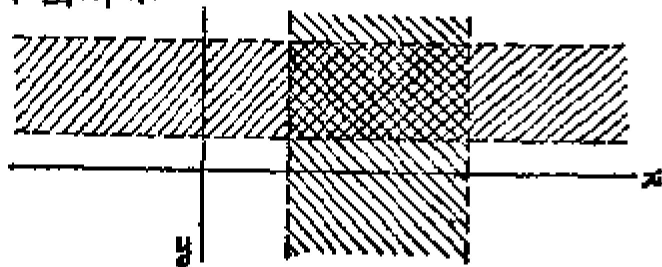
设 (X, τ) 是一个拓扑空间；$\mathscr{S}$ 是X的一个开集组，即 $\mathscr{S}\subset\tau$。如果一切 $\mathscr{S}$ 中有限个集之交构成了 τ 的一个基，则 $\mathscr{S}$ 称为X上的拓扑 τ 的一个**准基**(subbase)。

例 2.1 $\mathbf{R}$ 中任何开区间 (a, b) 都可表示为两个无限开区间(a, ∞)与$(-\infty, b)$之交：

$$(a, b)=(a, \infty)\cap(-\infty, b)$$

而开区间组是 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑的一个基，所以一切无限开区间所构成的组是 $\mathbf{R}$ 的一个准基。

例 2.2 平面 $\mathbf{R}^2$ 上无限开横带与无限开竖带之交是一个开矩形，如下图所示



但如前所述，开矩形组构成 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑的一个基。从而，一切无限开横带与一切无限开竖带所成之组 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑的一个准基。

由集组产生的拓扑（Topologies generated by classes of stes）

设$\mathscr{A}$为非空集X的一个子集组，则前面已论证过，$\mathscr{A}$可以不是X上任何拓扑的基。然而，$\mathscr{A}$却总是能够在下述的意义下**产生**(generates) X上的一个拓扑的。

定理 6.2 设任给非空集X的一个子集组$\mathscr{A}$，则X上有唯一的拓扑τ，使$\mathscr{A}$成为τ的一个准基。即：由一切能表达为$\mathscr{A}$中有限个集之交的集所构成的集组就是X上的这个拓扑τ的基。

例 3.1 考察$X=\{a, b, c, d\}$的子集组

$$\mathscr{A}=\{\{a, b\},\{b, c\},\{d\}\}$$

则$\mathscr{A}$中之集的有限交产生下面的集组

$$\mathscr{B}=\{\{a, b\},\{b, c\},\{d\},\{b\},\varnothing, X\}$$

（注：$X\in\mathscr{B}$ 是按照下面的规定得到的。这个规定是：$\mathscr{A}$的空子组之交是全空间）。

取$\mathscr{B}$中之集的一切可能的并，得下面的集组：

$$\tau=\{\{a, b\},\{b, c\},\{d\},\{b\},\varnothing, X,\{a, b, d\},\{b, c, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}\}$$

这就是X上的由集组$\mathscr{A}$所产生的拓扑。

例 3.2 设$(X, \precsim)$为某一非空的全序集。则由X的下述形式的子集

$$\{x\in X: x\prec p, p\in X\} \text{ 或 } \{x\in X, p\prec x, p\in X\}$$

构成的集组所产生的拓扑称为**X上的序拓扑** (order topology

on X)。注意：由例 2.1 可知，$\mathbf{R}$ 上的通常拓扑就是 $\mathbf{R}$ 上的(自然)序拓扑。

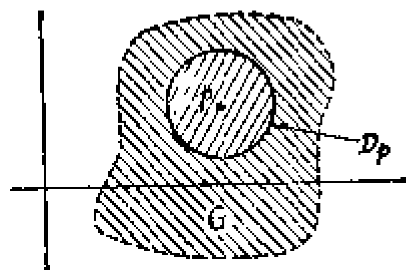
由一集组产生的拓扑也可以用下面的命题来描述：

命题 6.3 设$\mathscr{A}$为非空集X上的一个集组，则X上由$\mathscr{A}$产生的拓扑 τ 是X上一切含有$\mathscr{A}$的那些拓扑的交。

局部基（Local bases）

设 p 为拓扑空间X的任意一点；$\mathscr{B}_p$ 为一开集组，其中每个开集都含 p 点。若 $\mathscr{B}_p$ 有这样的性质：对于每个含 p 点的开集 G，有 $G_p\in\mathscr{B}_p$ 存在，使得 $p\in G_p\subset G$，则开集组 $\mathscr{B}_p$ 称为 **p 点处的一个局部基** (a local base at p)。

例 4.1 考察平面$\mathbf{R}^2$上的通常拓扑及其上的一点 $p\in\mathbf{R}^2$ 则以 p 为中心的一切开圆盘所构成的组 $\mathscr{B}_p$ 是 p 点处的一个局部基。因为如前面所证，任何含 p 点的开集 G 必含一个以 p 为中心的开圆盘 D_p，如下图所示：



类似地，直线 $\mathbf{R}$ 上的以 $a\in\mathbf{R}$ 为中心的一切开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 所构成的集组是点 a 处的一个局部基。

一个拓扑的基（有时也说"一个大范围的基"—— (a base in the large) 与在一点处的局部基之间有下面的命题所说的关系。

命题 6.4 设$\mathscr{B}$为X上的拓扑 τ 的一个基；又设 $p\in X$。则$\mathscr{B}$中一切含 p 点之集所构成的集组是 p 点处的一个局部基。

前面有些用含 p 点的开集来定义的概念，也可以用 p 点

处的局部基来刻划，例如：

命题 6.5 拓扑空间X中的一点p成为集合$A\subset X$的聚点的充要条件是p点处一个局部基的每个集都含有A中的一个异于p的点。

命题 6.6 拓扑空间X的一个点列$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$收敛于$p\in X$的充要条件是：$p$点处一个局部基的每个集都含有点列中几乎所有的项。

由前面的三个命题可以得到下面的有用的推论：

推论 6.7 设$\mathscr{B}$为X上的拓扑τ的一个基，则：

(i) $p\in X$成为$A\subset X$的一个聚点的充要条件是$\mathscr{B}$中任何含p的开的基集B都含有A的一个异于p的点。

(ii) X中的点列$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$收敛于$p\in X$的充要条件是$\mathscr{B}$中任何含$p$的开的基集$B$都含点列中几乎所有的项。

例 4.2 考察$\mathbf{R}$上的下极限拓扑τ。一切左闭右开的区间所成的集是此拓扑的一个基。令$A=(0, 1)$，则因$G=[1, 2)$是一个τ-开集，它含1，而$G\cap A=\varnothing$，故1不是A的聚点。

另一方面，$0\in\mathbf{R}$却是A的一个聚点，这是因为若开的基集$[a, b)$含有0时，即$a\leqslant 0<b$时，它亦必含A的异于0的点。

习 题 解 答

基

1．求证关于拓扑之基的两种定义的等价性，即：设$\mathscr{B}$是τ的一个子组，则下面两个命题是等价的：

（ⅰ）每个 $G\in\tau$ 都可表为$\mathscr{B}$中某些集的并。

（ⅱ）对于开集G的每一点 p，有 $B_p\in\mathscr{B}$ 使 $p\in B_p\subset G$。

解：若 $G=\bigcup_i B_i$，其中 $B_i\in\mathscr{B}$，则每点 $p\in G=\bigcup_i B_i$ 属于此并中至少一个集 B_{i_0}，所以

$$p\in B_{i_0}\subset\bigcup_i B_i=G。$$

另一方面，若对每点 $p\in G$，有 $B_p\in\mathscr{B}$ 使 $p\in B_p\subset G$，则

$$G=\bigcup\{B_p: p\in G\}。$$

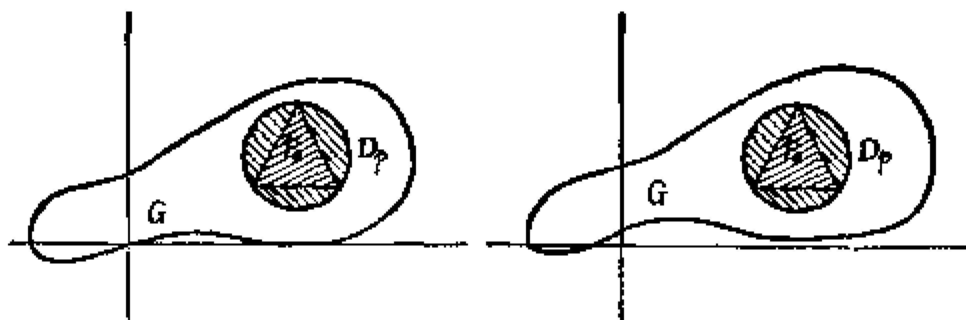
因此G是$\mathscr{B}$中一些集的并。

2．考察 $\mathbf{R}^2$ 平面上两个子集组：

（ⅰ）所有开的等边三角形所构成的组；

（ⅱ）所有开的正方形，其边与坐标轴平行者所构成的组。问这两个集组是否各构成 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑的一个基？

解：上面两个集组都是 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑的基。因为设 G 是 $\mathbf{R}^2$ 上一个开子集，又设 $p\in G$。则有一个以 p 为中心的开盘 D_p，使 $p\in D_p\subset G$。则可作等边三角形、也可作正方形内接于 D_p，如下图所示：



因此上述二集组中的每个集组都满足拓扑的基的第二种定义。

3．设$\mathscr{B}$是X上的拓扑τ的一个基，$\mathscr{B}^*$是一个开集组，它含$\mathscr{B}$作为子组，即：$\mathscr{B}\subset\mathscr{B}^*\subset\tau$。求证：$\mathscr{B}^*$也是$\tau$

的一个基。

解：设G是X的一个开子集。因为$\mathscr{B}$是(X, τ)的基，所以G是$\mathscr{B}$中之集的并，即$G=\bigcup_i B_i$，其中$B_i \in \mathscr{B}$。但是$\mathscr{B} \subset \mathscr{B}^*$；因此每个$B_i \in \mathscr{B}$也属于$\mathscr{B}^*$。因此，$G$是$\mathscr{B}^*$中之集的并，所以$\mathscr{B}^*$也是$(X, \tau)$的基。

4．设X是离散空间，又设$\mathscr{B}$是X的一切单元素集所构成的组，即$\mathscr{B}=\{\{p\}: p \in X\}$。求证：$X$中任何子集组$\mathscr{B}^*$成为$X$的一个基的充要条件是它是$\mathscr{B}$的一个母集。

解：设$\mathscr{B}^*$是X的一个基，因为在离散拓扑空间中，每个单元素集都是一个开集，故$\{p\}$必须是$\mathscr{B}^*$中之集的并。但$\{p\}$只能是它自己或它和$\varnothing$之并，所以$\mathscr{B}^*$必须含每个$\{p\}$，即$\mathscr{B} \subset \mathscr{B}^*$。

反之，若$\mathscr{B} \subset \mathscr{B}^*$，则因$\mathscr{B}$是$X$的一个基，所以$\mathscr{B}^*$也是$X$的一个基(见例 1.3)。

5．求证定理 6.1：设$\mathscr{B}$是非空集X上的一个集组，则$\mathscr{B}$能成为X上某个拓扑的一个基的充要条件是它具备下列两个性质：

(i) $X=\bigcup\{B: B \in \mathscr{B}\}$；

(ii) $\mathscr{B}$中任何两个集B与B^*的交$B \cap B^*$是$\mathscr{B}$中的某些集之并。换种说法，也就是：若$p \in B \cap B^*$，则有$B_p \in \mathscr{B}$使$p \in B_p \subset B \cap B^*$。

解：设$\mathscr{B}$是X上的一个拓扑τ的一个基，则因X是开集，它必须是$\mathscr{B}$中的一些集之并，从而也就等于$\mathscr{B}$中一切集之并：$X=\bigcup\{B: B \in \mathscr{B}\}$。另外，任取$\mathscr{B}$中的两个集$B$与$B^*$，则因它们是开集，所以它们的交$B \cap B^*$也是开集，从而因$\mathscr{B}$是基，故开集$B \cap B^*$可以表示为$\mathscr{B}$中某些集之并。

这证明了：若$\mathscr{B}$是一个基，则(i)(ii)必须成立。

现在反过来，设$\mathscr{B}$是X上的集组，满足(i)与(ii)。令τ表示X上能表达为$\mathscr{B}$中某些集之并的这种集所构成的集组。我们来证明τ是X上的拓扑。由此便知$\mathscr{B}\subset\tau$就是这个拓扑τ的基。

由(i)，$X=\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$，故$X\in\tau$。而$\varnothing$是$\mathscr{B}$中的空子组之并，即$\varnothing=\bigcup\{B: B\in\varnothing\subset\mathscr{B}\}$，故$\varnothing\in\tau$。因此，$\tau$满足[$\mathbf{O}_1$]。

设$\{G_i\}$为τ的一个子组，则由τ的定义，每个G_i都可表为$\mathscr{B}$中一些集的并，因此$\bigcup_i G_i$也可表为$\mathscr{B}$中一些集的并。所以$\bigcup_i G_i\in\tau$。这说明τ满足[$\mathbf{O}_2$]。

最后，设G，$H\in\tau$，要证：$G\cap H\in\tau$。由τ的定义，$\mathscr{B}$有两个子组$\{B_i: i\in I\}$及$\{B_j: j\in J\}$，使

$$G=\bigcup_i B_i,\qquad H=\bigcup_j B_j。$$

于是由分配律得

$$\begin{aligned}G\cap H&=(\bigcup_i B_i)\cap(\bigcup_j B_j)\\&=\bigcup\{B_i\cap B_j: i\in I,\ j\in J\},\end{aligned}$$

而由假设(ii)知$B_i\cap B_j$是$\mathscr{B}$中的集之并，因此$G\cap H=\bigcup\{B_i\cap B_j: i\in I,\ j\in J\}$也是$\mathscr{B}$中的集之并，因此$G\cap H\in\tau$。这说明$\tau$满足[$\mathbf{O}_3$]。

这样就证明了τ是X上的一个拓扑，而$\mathscr{B}$是它的基。

6．设：$\mathscr{B}$与$\mathscr{B}^*$分别为X上的拓扑τ与τ^*的基。求证：若每个$B\in\mathscr{B}$都可表为$\mathscr{B}^*$中的元素之并，则τ比τ^*粗糙，即$\tau\subset\tau^*$。

解：设G是τ-开集，则G是$\mathscr{B}$中的元素之并，即$G=\bigcup_i B_i$，其中$B_i\in\mathscr{B}$。但由假设，每个$B_i\in\mathscr{B}$是$\mathscr{B}^*$的元素

之并，因此 $G=\bigcup_i B_i$ 也是 $\mathscr{B}^*$ 的元素之并，而这些元素是 τ^*-开集。因此 G 也是 τ^*-开集。所以 $\tau\subset\tau^*$。

7．求证：实直线 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑 $\mathscr{U}$ 比 $\mathbf{R}$ 上的上极限拓扑 τ 粗糙（一切形如 $(a, b]$ 的左开右闭区间之集是 τ 的一个基）。

解：首先注意：每个开集都可表为一些左开右闭区间之并，例如

$$(a, b)=\bigcup\left\{\left(a, b-\frac{1}{n}\right]: n\in\mathbf{N}\right\}$$

而由前面的习题，我们知道开区间组是 $\mathscr{U}$ 的基，故 $\mathscr{U}\subset\tau$，即任何 $\mathscr{U}$-开集也是 τ-开集。

8．考察实直线 $\mathbf{R}$ 上的上极限拓扑 τ（一切形如 $(a, b]$ 的左开右闭区间所构成的集是 τ 的一个基）。

(i) 求证：开无限区间 $(4,\infty)$ 及闭无限区间 $(-\infty, 2]$ 是 τ-开集。

(ii) 求证：任何开无限区间 (a, ∞) 及任何闭无限区间 $(-\infty, b]$ 都是 τ-开集。

(iii) 求证：任何左开右闭区间 $(a, b]$ 既是 τ-开集也是 τ-闭集。

解：(i) 因

$$(4, \infty)=(4, 5]\cup(4, 6]\cup(4, 7]\cup(4, 8]\cup\cdots$$

$$(-\infty, 2]=(0, 2]\cup(-1, 2]\cup(-2, 2]\cup\cdots$$

两者都是 τ 的一些基元素之并故它们都是 τ-开集。

(ii) 类似地

$$(a, \infty)=(a, a+1]\cup(a, a+2]\cup(a, a+3]\cup\cdots$$

$$(-\infty, b] = (b-1, b] \cup (b-2, b] \cup (b-3, b]$$
$$\cup (b-4, b] \cup \cdots$$

所以都是 τ -开集。

(iii) $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$ 右边两个集都是 τ -开集，所以它们的并也是 τ-开集。从而 $(a, b]$ 是 τ -闭集。但 $(a, b]$ 属于 τ 的基，所以它又是 τ -开集。

准基与由已知集组产生的拓扑

9．设 $X = \{a, b, c, d, e\}$。令 $\mathscr{A} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$ 求 X 上由 $\mathscr{A}$ 产生的拓扑。

解：首先求 $\mathscr{A}$ 中之集的一切有限交而得集组 $\mathscr{B}$：

$$\mathscr{B} = \{X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \varnothing\}$$

（注：$X \in \mathscr{B}$ 是由于按规定：$\mathscr{A}$ 的空子组之交是 X）。

然后求 $\mathscr{B}$ 中之集的一切可能的并，得 τ：

$$\tau = \{X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \varnothing$$
$$\{a, b, c, d\}, \{c, d, e\}\}$$

这就是 X 上由集组 $\mathscr{A}$ 产生的的拓扑。

10．设 $\mathscr{A}$ 为实直线 $\mathbf{R}$ 上所有长度为 1 的闭区间 $[a, a+1]$ 所构成的组，求 $\mathscr{A}$ 所产生的拓扑。

解：设 p 表示 $\mathbf{R}$ 上的一点。因闭区间 $[p-1, p]$ 和 $[p, p+1]$ 的长度都是 1，所以都属于 $\mathscr{A}$。因此

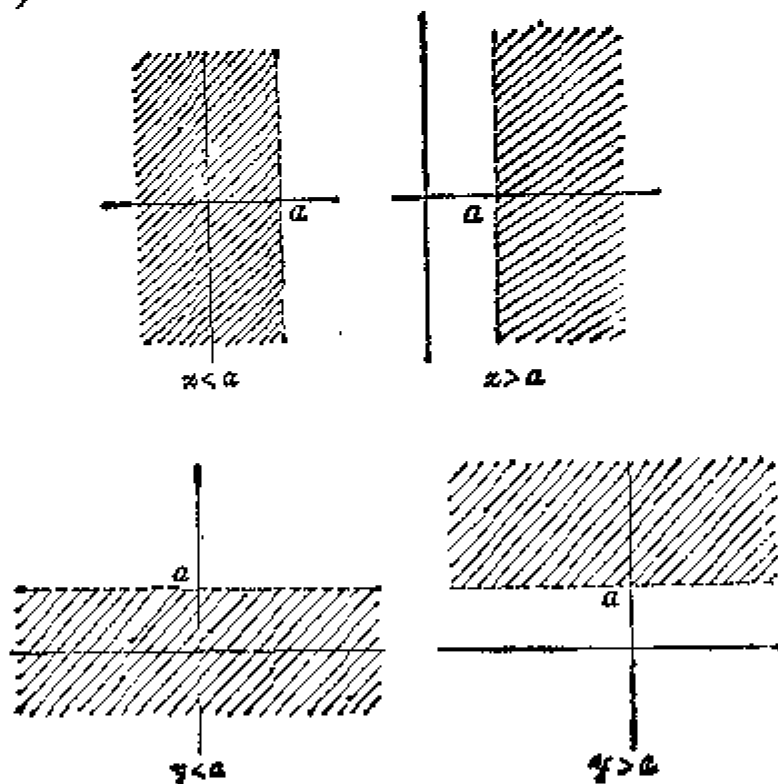
$$[p-1, p] \cap [p, p+1] = \{p\}$$

也属于 τ。这说明每个单元素集 $\{p\}$ 都属于 τ。因此 τ 是 X 上的离散拓扑。

11．设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上所有形如下述的半平面 H 所构成的集：

$$H = \{\langle x, y \rangle;\ x < a \text{ 或 } x > a \text{ 或 } y < a \text{ 或 } y > a\}$$

（见下图）



试求 $\mathbf{R}^2$ 上由$\mathscr{A}$所产生的拓扑。

解：注意：$\mathbf{R}^2$ 上每个开矩形

$$B=\{\langle x,\ y\rangle:\ a<x<b,\ c<y<d\}$$

是$\mathscr{A}$中的下列四个半平面之交：

$$H_1=\{\langle x,\ y\rangle:\ a<x\}$$
$$H_2=\{\langle x,\ y\rangle:\ x<b\}$$
$$H_3=\{\langle x,\ y\rangle:\ c<y\}$$
$$H_4=\{\langle x,\ y\rangle:\ y<d\}$$

而每个 $H\in\mathscr{A}$ 都是$\mathscr{U}$-开集，且所有形如 B 的开矩形所构成的集是 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑$\mathscr{U}$的一个基，所以$\mathscr{A}$是$\mathscr{U}$的一个准基。因此$\mathscr{A}$所产生的拓扑就是 $\mathbf{R}^2$ 上的通常拓扑。

12．考察 $X=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 上的离散拓扑 $\mathscr{D}$。试求$\mathscr{D}$的一个准基$\mathcal{S}$，要求$\mathcal{S}$不含任何单元素集。

解：只须注意：X的一个子集组$\mathscr{B}$成为X上的离散拓扑$\mathscr{D}$的一个基的充要条件是它含 X 的所有单元素集。因此$\mathcal{S}$成为$\mathscr{D}$的一个准基的充要条件是$\mathcal{S}$中的集的一切有限交能给出$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{e\}$。由此可知

$$\mathcal{S}=\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$$

是$\mathscr{D}$的一个准基。

13．设$\mathcal{S}$是X上的拓扑τ的一个准基。又设A是X的一个子集，求证：集组 $\mathcal{S}_A=\{A\cap S: S\in \mathcal{S}\}$ 是A上的相对拓扑 τ_A 的一个准基。

解：设H是A上的 τ_A-开集，则X上有τ-开集G使

$$H=A\cap G。$$

按假设，$\mathcal{S}$是 τ 的一个准基，故

$$G=\bigcup_i(S_{i1}\cap S_{i2}\cap\cdots\cap S_{in_i}) \quad 其中\ S_{ik}\in \mathcal{S}$$

因此

$$H=A\cap G=A\cap [\bigcup_i(S_{i1}\cap S_{i2}\cap\cdots\cap S_{in_i})]$$

$$=\bigcup_i[(A\cap S_{i1})\cap\cdots\cap(A\cap S_{in_i})]$$

这就是说，H 是 $\mathcal{S}_A$ 中的有限交之并。这说明 $\mathcal{S}_A$ 是 τ_A 的一个准基。

14．求证：所有形如$(a, 1]$与$[0, b)$的区间，其中 $0<a$，$b<1$，构成单位区间 $I=[0, 1]$上相对通常拓扑的一个准基。

解：只须注意：形如(a, ∞)及$(-\infty, b)$的一切无限开区间构成实直线$\mathbf{R}$上通常拓扑的一个准基。由上题便知：这些无限开区间与 $[0, 1]=I$ 的交构成 I 上相对拓扑的一个准基。这些交集就是$\varnothing$，I，$(a, 1]$，$[0, b)$，其中 $0<a$，$b<1$。但在任何准基中都可以删去$\varnothing$和整个空间（在这里是 I）的，故一切形如$(a, 1]$与$[0, b)$的区间构成I 的一个准基。

15. 求证：若$\mathcal{S}$同时是X上的拓扑τ与τ^*的一个准基，则$\tau=\tau^*$。

解：设$G\in\tau$。则因$\mathcal{S}$是τ的一个准基，故G可表为：

$$G=\bigcup_i(S_{i1}\cap\cdots\cap S_{in_i})，其中\ S_{i_k}\in\mathcal{S}。$$

但$\mathcal{S}$也是τ^*的子基，从而$\mathcal{S}\subset\tau^*$，于是每个S_{i_k}都属于τ^*。而τ^*是一个扑，拓所以从上面的表达式知$G\in\tau^*$。于是$\tau\subset\tau^*$。类似地可得$\tau^*\subset\tau$，故$\tau=\tau^*$。

16. 求证定理6.2：设任给非空集X的一个子集组$\mathscr{A}$，则X上有唯一的拓扑τ，使$\mathscr{A}$是τ的一个准基。亦即：由$\mathscr{A}$中元素的一切有限交构成X上的一个拓扑τ之基。

解：先来证明$\mathscr{A}$的一切有限交所构成的组$\mathscr{B}$满足定理6.1的两个条件：

（i）$X=\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$。

（ii）若$G, H\in\mathscr{B}$，则$G\cap H$可表为$\mathscr{B}$中之集的并（证明后，便知$\mathscr{B}$是X上的一个拓扑的基）。

由规定：X的子集组$\mathscr{A}$的空子组之交就是X本身，所以$X\in\mathscr{B}$，从而自然有：

$$X=\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}。$$

其次设$G, H\in\mathscr{B}$，则因G, H都是$\mathscr{A}$中有限个集的交，故$G\cap H$也是$\mathscr{A}$中有限个集的交，从而$G\cap H\in\mathscr{B}$。

这样就证明了$\mathscr{B}$是X上的一个拓扑τ的基，而$\mathscr{A}$是它的准基。并由上一习题知，τ是唯一的。

17. 求证命题6.3：设$\mathscr{A}$为非空集X的一个子集组，则由$\mathscr{A}$产生的X上的拓扑τ是X上一切含有$\mathscr{A}$的那些拓扑之交。

解：令$\{\tau_i\}$表示X上一切含$\mathscr{A}$的拓扑所构成的簇，并

令 $\tau^*=\bigcap_i \tau_i$，则 $\mathscr{A}\subset\tau^*$。现在要证 $\tau=\tau^*$。

因 τ 是含$\mathscr{A}$的一个拓扑，而 τ^* 是所有这种拓扑之交，故 $\tau^*\subset\tau$。

另一方面，设 $G\in\tau$，则由 τ 的定义知：

$G=\bigcup_i(S_{i1}\cap S_{i2}\cap\cdots\cap S_{in_i})$，其中 $S_{ik}\in\mathscr{A}$ 但 $\mathscr{A}\subset\tau^*$，故每个 $S_{ik}\in\tau^*$，从而 $S_{i1}\cap S_{i2}\cap\cdots\cap S_{in_i}\in\tau^*$，因此

$$G=\bigcup_i(S_{i1}\cap\cdots\cap S_{in_i})\in\tau^*。$$

这样，我们证明了若 $G\in\tau$ 则 $G\in\tau^*$。因此 $\tau\subset\tau^*$。合起来得 $\tau=\tau^*$。

局部基

18．求证命题6.5：拓扑空间(X,τ)中的一点 p 成为集合 $A\subset X$ 的聚点的充要条件是：p 点处某个局部基 $\mathscr{B}_p$ 中的每个集都含有 A 中的一个异于 p 的点。

解：我们知道，$p\in X$ 成为 A 的一个聚点的充要条件是对任何含 p 点的开集 $G\in\tau$ 都有$(G\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing$。但 $\mathscr{B}_p\subset\tau$，故当 p 是 A 的聚点时，对任何 $B\in\mathscr{B}_p$ 都有 $(B\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing$。

现在反过来，设 $(B\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing$ 对所有的 $B\in\mathscr{B}_p$ 成立，并设 G 是 X 中含 p 的一个开集。则由于 $\mathscr{B}_p$ 是 τ 在 p 点处的局部基，故有 $B_0\in\mathscr{B}_p$ 使 $p\in B_0\subset G$，但由此得

$$(G\setminus\{p\})\cap A\supset(B_0\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing,$$

故$(G\setminus\{p\})\cap A\neq\varnothing$，从而 p 是 A 的一个聚点。

19．求证命题6.6：拓扑空间 (X,τ) 的一个点列 $\langle a_1, a_2,\cdots\rangle$ 收敛于 $p\in X$ 的充要条件是：p 点处某个局部基 $\mathscr{B}_p$

的每个集都含有点列中的几乎所有的项。

解：所谓 $a_n \to p$ 是指：每个含 p 点的开集 $G \in \tau$ 都含序列的几乎所有的项。但 $\mathscr{B}_p \subset \tau$，故每个 $B \in \mathscr{B}_p$ 含序列的几乎所有的项。

反过来，设每个 $B \in \mathscr{B}_p$ 含序列中的几乎所有的项，并设 G 是含 p 点的一个开集。则有 $B_0 \in \mathscr{B}_p$ 使 $p \in B_0 \subset G$，从而 G 含序列的几乎所有的项，这说明 $\langle a_n \rangle$ 收敛于 p。

20．求证：在离散空间 X 中每一点 p 都有一个有限的局部基。

解：只要注意：在离散空间中，每个子集都是开集，所以单元素集 $\{p\}$ 也是开集。因此，集组 $\mathscr{B}_p = \{\{p\}\}$，即：由单元素集 $\{p\}$ 这一个集所构成的集组是 p 点处的一个局部基，这是因为任何一个含 p 点的开集 G 都必须是 $\{p\}$ 的母集。

21．考察实直线 $\mathbf{R}$ 上的上极限拓扑 τ（形如 $(a, b]$ 的一切左开右闭区间所构成的组是 τ 的一个基）。试问下列序列是否收敛于 0：

(i) $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \rangle$；

(ii) $\langle -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots \rangle$。

解：(i) 不收敛于 0。这是因为例如 τ-开集 $(-2, 0]$ 是含 0 的，但它不含这个序列的任何一项。

(ii) 是收敛于 0。因为设某个开的基集 $(a, b]$ 含 0，则 $a < 0 \leqslant b$，从而有 $n_0 \in \mathbf{N}$，使 $a < -\frac{1}{n_0} < 0$，于是当 $n > n_0$ 时，有 $-1/n \in (a, b]$。

补 充 习 题

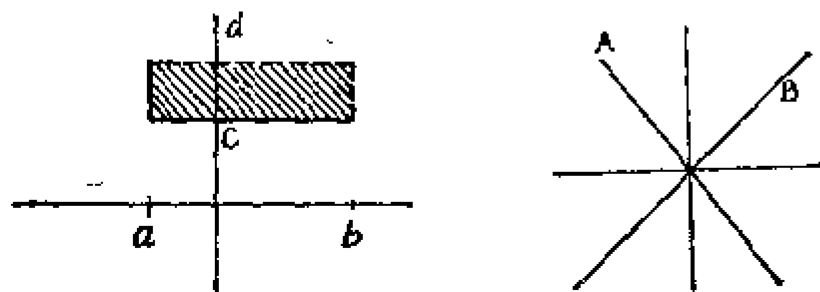
拓扑基

22．求证闭区间$[a, b]$的集组，当a，b均为有理数，同时$a<b$时，不是实直线$\mathbf{R}$上的一个拓扑基。

23．求证闭区间$[a, b]$的集组，当a为有理数，b为无理数，同时$a<b$时是实直线$\mathbf{R}$上的一个拓扑基。

24．设$\mathscr{B}$是X上拓扑τ的一个基，又设$A\subset X$，求证集组$\mathscr{B}_A=\{A\cap G: G\in\mathscr{B}\}$是$A$上相对拓扑$\tau_A$的一个基。

25．设$\mathscr{B}$是平面$\mathbf{R}^2$中如下图所示的即形如



$$\{\langle x, y\rangle: a\leqslant x<b, c\leqslant y<d\}$$

的半开矩形的集组。

（i）求证$\mathscr{B}$是$\mathbf{R}^2$上拓扑τ的一个基。

（ii）求证直线

$$A=\{\langle x, y\rangle: x+y=0\}$$

上的相对拓扑τ_A是A上的离散拓扑。

（iii）求证直线

$$B=\{\langle x, y\rangle: x=y\}$$

上的相对拓扑τ_B不是B上的离散拓扑。

26．设$\mathscr{B}$是非空集X上的一个子集组，根据集合包含关

系赋全序。求证若 $X=\bigcup\{B;\ B\in\mathscr{B}\}$，则$\mathscr{B}$是$X$上的一个拓扑基。

27．求证：X上的一个拓扑τ是有限的，当且仅当τ有一个有限基。

准　基

28．设 $X=\{a,b,c,d,e\}$，求X上由$\mathscr{A}=\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$所产生的拓扑$\tau$。

29．设τ为某非空集X上的离散拓扑，求最小准基$\mathcal{S}$。

30．设$\mathcal{S}$是所有闭区间$[a,b]$的集组，其中a与b是有理数，即$a,b\in\mathbf{Q}$且$a<b$。求证$\mathcal{S}\cup\{\{p\};\ p\in\mathbf{Q}\}$是实直线上由$\mathcal{S}$所产生的拓扑$\tau$的一个基。

31．求证若$\mathcal{S}$是X上拓扑τ的一个准基，则$\mathcal{S}\setminus\{X,\varnothing\}$也是$\tau$的一个准基。

32．设τ与τ^*是X上分别由$\mathscr{A}$与$\mathscr{A}^*$所产生的拓扑，求证(i) $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}^*$导致$\tau\subset\tau^*$，(ii) $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}^*\subset\tau$导致$\tau=\tau^*$。

33．设$\mathcal{S}$是拓扑空间X的一个准基，又设$G\subset X$是包含点$p\in X$的一个开集。求证存在$\mathcal{S}$的有限个元素，譬如说S_1，S_2，…，S_m，具有性质：$p\in S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_m\subset G$。

局部基

34．设(X,τ)是一个拓扑空间，又设$\mathscr{A}$是$p\in X$处的τ-局部基，考虑X中使$p\in A\subset X$的任一子集A及A上的相对拓扑τ_A。求证：如下的A的子集组是$p\in A$处的τ_A-局部基：$\mathscr{A}_A=\{A\cap G;\ G\in\mathscr{A}\}$。

35．设X是拓扑空间，$p\in X$，$\mathscr{N}_p$是p处的邻域系，$\mathscr{B}$

是p处的局部基。求证p点的每一邻域包含p点局部基的一个元素；即对每一$N\in\mathscr{N}_p$，$\exists G\in\mathscr{B}_p$使$G\subset N$。

36．求证若点p有一个有限的局部基$\mathscr{B}_p$，则点p也有一个恰好由一个集组成的局部基。

37．考虑实直线**R**上以左开右闭区间$(a, b]$的集组为基的上极限拓扑，试判断下面每一个序列是否收敛：

(i) $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\rangle$，(ii) $\left\langle -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots \right\rangle$，

(iii) $\left\langle -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \right\rangle$。

38．设τ是实直线**R**上由所有闭区间$[a, b]$的集组$\mathcal{S}$所产生的拓扑，其中a, b是有理数（见习题30）。

(i) 判断下面每一个序列是否收敛：

(a) $\left\langle 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{4}, \cdots \right\rangle$，

(b) $\left\langle \sqrt{2}+\frac{1}{2}, \sqrt{2}+\frac{1}{3}, \sqrt{2}+\frac{1}{4}, \cdots \right\rangle$。

(ii) 试确定**R**的下述子集的闭包：

(a) $(2, 4)$，(b) $(\sqrt{2}, 5]$，(c) $(-3, \pi)$，

(d) $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$。

(iii) 求证**R**的任一有限子集是τ-闭的。

39．设$\mathcal{S}$是拓扑空间X的准基，又设$p\in X$。

(i) 用反例证明集组$\mathcal{S}_p=\{S\in\mathcal{S}: p\in S\}$，不必是$p$点的局部基。

(ii) 求证$\mathcal{S}_p$中元素的有限交组成p点的局部基。

(iii) 求证X中的序列$\langle a_n\rangle$收敛于p，当且仅当每一$S\in\mathcal{S}_p$包含了序列的除有限项外的其余所有项。

补充习题答案

28. $\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$。

37. (i) 否， (ii) 是， (iii) 否。

38. (i) (a)否， (b)是。 (ii) $(a)(2, 4)$，
$(b)[\sqrt{2}, 5]$， $(c)(-3, \pi]$， $(d)A$。

39. (ii)提示：利用习题 33。

第七章　连续与拓扑等价

连续函数(Continuous functions)

设(X, τ)与(Y, τ^*)是拓扑空间；f为由X到Y的一个函数。若Y中任何τ^*-开集H的逆象$f^{-1}[H]$是X中的一个τ-开集，即：

$$H \in \tau^* \Longrightarrow f^{-1}[H] \in \tau$$

则称f为相对于τ与τ^*连读，或称τ—τ^***连续**(τ—τ^* continuous)或简称**连续**(continuous)。

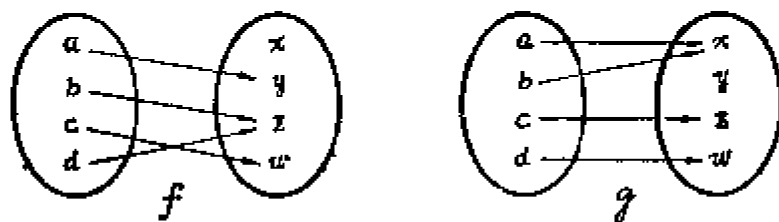
对于由X到Y的函数f，如果需要特别省明有关的拓扑时，将用下面的写法：$f:(X, \tau) \to (Y, \tau^*)$。

例1.1　分别考察$X=\{a, b, c, d\}$与$Y=\{x, y, z, w\}$上的拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$
$$\tau^*=\{Y, \varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$$

同时考察由下面两个图形表示的函数

$$f: X \to Y \text{ 与 } g: X \to Y。$$



函数f是连续的，因为Y上的拓扑τ^*中每个集的逆都

是X上的拓扑τ中的集。函数g则是不连续的。因为$\{y, z, w\} \in \tau^*$，即$\{y, z, w\}$是Y的一个开集，而$g^{-1}[\{y, z, w\}] = \{c, d\}$不是$X$中的开集，即$g^{-1}[\{y, z, w\}]$不属于$\tau$。

例 1.2 考察任何离散拓扑空间$(X, \mathscr{D})$与任何拓扑空间(Y, τ)，则任何函数$f: X \to Y$都是$\mathscr{D}$—τ连续的，这是因为离散空间的任何子集都是开集，所以Y中任何开集H的逆象必然是开集。

例 1.3 设X, Y为拓扑空间，$f: X \to Y$是由X到Y的函数；$\mathscr{B}$是Y上拓扑的一个基。如果对于每个$B \in \mathscr{B}$，都有：$f^{-1}[B]$是X的开集，则f是连续函数。这是因为设H是Y的一个开集，则$H = \bigcup_i B_i$，其中$B_i \in \mathscr{B}$，但

$$f^{-1}[H] = f^{-1}[\bigcup_i B_i] = \bigcup_i f^{-1}[B_i]$$

而按假设每个$f^{-1}[B_i]$都是X中的开集。从而$f^{-1}[H]$作为开集之并也是开集。因此f是连续的。

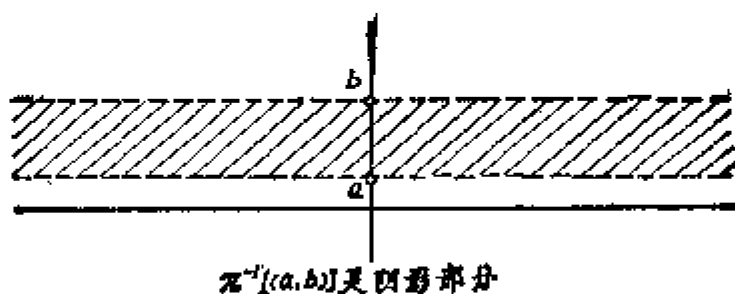
最后一例的内容可以正式写成下面的命题：

命题 7.1 函数$f: X \to Y$为连续，当且仅当Y的一个基中的每个集的逆象是X中的一个开集。

这个命题还可以强化如下：

定理 7.2 设$\mathscr{S}$为拓扑空间Y的一个准基，则函数$f: X \to Y$为连续，当且仅当$\mathscr{S}$中每个集的逆象都是X中的一个开集。

例 1.4 把$\mathbf{R}^2$平面向两个坐标轴的射影映照在通常拓扑下是连续的。例如，考察由$\pi(\langle x, y \rangle) = y$定义的射影映照$\pi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$，则开区间$(a, b)$的逆象是无限开带，如下图所示。于是由命题 7.1 可知$\mathbf{R}$中任何开集的逆象是$\mathbf{R}^2$中的开集，所以π是连续的。



$\pi^{-1}[(a,b)]$是阴影部分

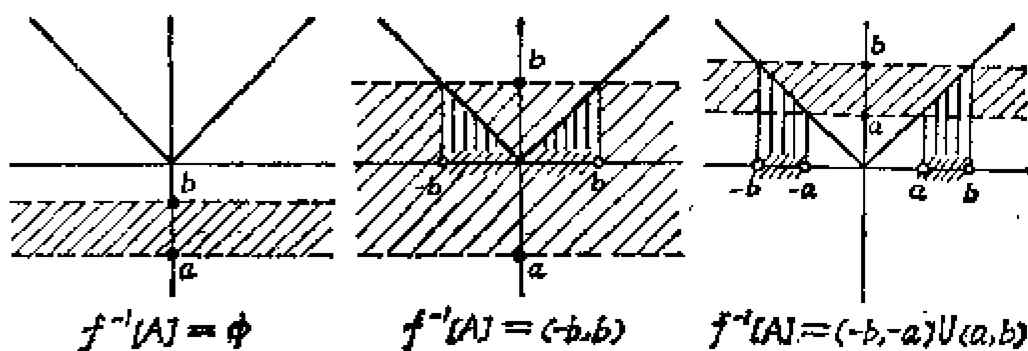
例 1.5 **R** 上的绝对值函数：

$$f(x)=|x|，对所有的 x\in\mathbf{R}$$

是连续的。因为，令 $A=(a,b)$ 是 **R** 中的一个开区间，则

$$f^{-1}[A]=\begin{cases}\varnothing & 若\ a<b\leqslant 0\\ (-b,\ b) & 若\ a<0<b\\ (-b,\ -a)\cup(a,\ b) & 若\ 0\leqslant a<b\end{cases}$$

如下图所示：



$f^{-1}[A]=\phi$　　$f^{-1}[A]=(-b,b)$　　$f^{-1}[A]=(-b,-a)\cup(a,b)$

在每种情况下 $f^{-1}[A]$ 都是开集，所以 f 连续。

连续函数的特征也可以用闭集来描写：

定理 7.3 函数 f：$X\to Y$ 为连读，当且仅当 Y 中的任何闭集的逆象都是 X 中的闭集。

连续函数与任意接近(Continuous functions and arbitrary closeness)

设 X 是一个拓扑空间；p 是 X 中的一点，$A\subset X$ 是 X 的

--个子集。则当

(i) $p\in A$ 或 (ii) p 是 A 的一个聚点时，称点 p 任意接近(arbitrarily close)子集 A。由 $\bar{A}=A\cup A'$ 可知：集 A 的闭包就是由所有任意接近于 A 的点所构成。另外由 $\bar{A}=A^\circ\cup b(A)$ 可知：p 任意接近于 A 的意思也就是 p 是 A 的内点或是 A 的界点。

连续函数的特征也可以用**保持任意接近** (preserve arbitrary closeness)的性质来刻划，如下面定理所说。

定理 7.4 函数 $f:X\to Y$ 为连续，当且仅当对于任何点 $p\in X$ 及任何 $A\subset X$，

$$p \text{ 任意接近于 } A\Longrightarrow f(p) \text{ 任意接近于 } f[A]$$

或
$$p\in \bar{A}\Longrightarrow f(p)\in \overline{f[A]}$$

或
$$f[\bar{A}]\subset \overline{f[A]}。$$

在一点的连续性（Continuity at a point）

前面是把连续性概念作为一种**大范围的性质**(global property) 来定义的，就是说，它对函数在整个集 X 上的一种性态加以刻划。

但是，也可以给出相应的**局部性概念** (local concept) 即**“在一点连续”** (continuity at a point) 的概念如下：

函数 f: $X\to Y$ 在点 $p\in X$ 连续是指：Y 中任何含 $f(p)$ 的开集 H 的逆象 $f^{-1}[H]$ 都是 X 中含 p 点的开集的母集。或者等价地说：$f(p)$的任何邻域的逆象都是 p 的一个邻域，即：

$$N\in\mathcal{N}_{f(p)}\Longrightarrow f^{-1}[N]\in\mathcal{N}_p。$$

注意：如果考察实直线 R 上的通常拓扑，则对于函数 f：

$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 来说，上述定义和连续性的 ε—δ 定义是一致的。

事实上，函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的局部连续性与大范围连续性之间的关系对于一般的拓扑空间说来，也是成立的。即：

定理 7.5 设 X, Y 为拓扑空间，则函数 f: $X\to Y$ 为连续，当且仅当它在 X 的每一点连续。

在一点"序列连续"(Sequential continuity at a point)

考察函数 f: $X\to Y$ 及点 $p\in X$。若对 X 中任何收敛于 p 的序列 $\langle a_n\rangle$ 来说，Y 中的序列 $\langle f(a_n)\rangle$ 都收敛于 $f(p)$，即 $a_n\to p \Longrightarrow f(a_n)\to f(p)$，则称 f 在 p 点**序列连续** (sequentially continuous)。

在一点序列连续与连续之间有以下的关系：

命题 7.6 若函数 f: $X\to Y$ 在 $p\in X$ 连续，则它在 p 序列连续。

注意 上述命题的逆命题通常是不成立的。例如，考察实直线 $\mathbf{R}$ 上这样的拓扑 τ，它由 $\varnothing$ 及可数集的余集所构成。在这种拓扑下，序列 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 p，当且仅当它具有以下的形式（见第五章之例 7.3）：

$$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n0}, p, p, p, \cdots\rangle$$

于是对于任何函数 f: $(\mathbf{R}, \tau)\to(X, \tau^*)$ 来说，

$$\langle f(a_n)\rangle=\langle f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_{n0}), f(p), f(p), f(p), \cdots\rangle$$

都收敛于 $f(p)$。换句话说，任何定义在 $(\mathbf{R}, \tau)$ 上的函数在任何一点 $p\in X$ 都是序列连续的。但另一方

面，由 $f(x)=x$ 定义的函数 f：$(\mathbf{R}, \tau)\to(\mathbf{R}, \mathscr{U})$，即恒等函数，却不是 τ-$\mathscr{U}$ 连续的。这是因为 $f^{-1}[(0, 1)]=(0, 1)$不是 $\mathbf{R}$ 上的 τ-开集。

开函数与闭函数（Open and closed functions）

一个连续函数有以下的性质：开集的逆象是开集，闭集的逆象是闭集。这自然会使人提出以下两种类型的函数：

(1) 函数 f：$X\to Y$ 称为**开函数**(open function, interior function)，是指它把开集映照成为开集。

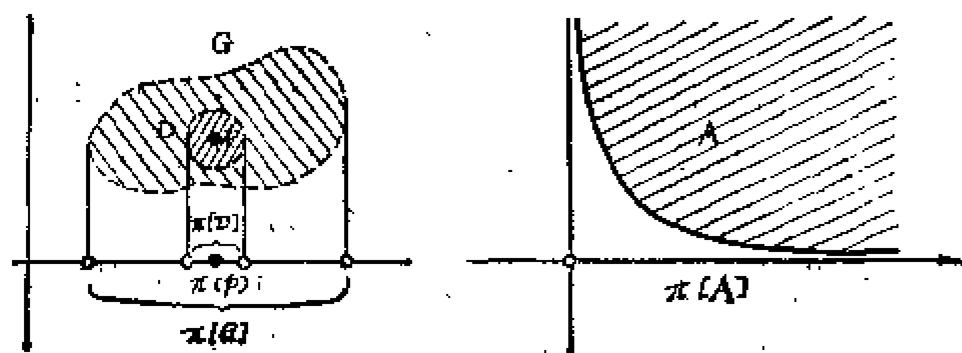
(2) 函数 g：$X\to Y$ 称为**闭函数**(closed function)是指它把闭集映照成为闭集。

一般来说，开函数不必是闭的；闭函数也不必是开的。事实上，在下一例子中的函数是开的和连续的，但不是闭的。

例 2.1 考察由平面 $\mathbf{R}^2$ 到 X 轴 $\mathbf{R}$ 的射影映照 π：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$，即 $\pi(\langle x, y\rangle)=x$。则任何开盘 $D\subset\mathbf{R}^2$ 的射影 $\pi[D]$ 是一个开区间。因而一个开集 $G\subset\mathbf{R}^2$ 的象 $\pi[G]$ 内的任何一点 $\pi(p)$ 属于包含在 $\pi[G]$内的一个开区间，就是说 $\pi[G]$ 是开集。因此 π 是一个开函数。另一方面，π 不是闭函数。例如闭集

$$A=\{\langle x, y\rangle: xy\geqslant 1, x>0\}$$

的射影 $\pi[A]=(0, \infty)$是不闭的（见下图）。



同胚空间（Homeomorphic spaces）

我们已经说明，一个拓扑空间(X,τ)是由集X连同由X挑选出的某个子集组τ所构成，这个子集组τ满足某些公理。

在两个拓扑空间(X,τ)与(Y,τ^*)之间可以有各种各样的函数。前面我们特别讨论了连续函数，开函数与闭函数，而不是讨论任意函数，是面为这几类函数保持了空间(X,τ)与(Y,τ^*)的某些结构。

现在假设有双射映照（即1—1与到上映照）f: $X\to Y$，则它诱生一个由X的势集（即X的一切子集所构成的集组）到Y的势集的双射映照f: $\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$。若此诱生的函数也把$\tau$映照到$\tau^*$上，即：在$X$中的开集与$Y$中的开集之间建立了一个一一对应关系，则从拓扑观点看来，空间(X,τ)与(Y,τ^*)是一致的。

定义 拓扑空间X与Y称为**同胚**(homeomorphic)或称为**拓扑等价**(topologically equivalent)是指：有一个双射（即1—1与到上）映照f: $X\to Y$存在，使f与f^{-1}都是连续函数。这时函数f称为一个**同胚映照**（homeo morphism）。

一个函数称为一个**双连续**（bicontinuous）函数，或称为一个**拓扑函数**（topological function）是指f既是开的又是连续的。

于是，一个函数f: $X\to Y$是一个同胚映照，当且仅当它是双连续的又是双射的。

例 3.1 设 $X=(-1, 1)$，则由 $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$ 定义的函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 是 1—1、到上与连续的。它的逆函数 f^{-1} 也是连续的。因此实直线与开区间 $(-1, 1)$ 同胚。

例 3.2 设 X 与 Y 为离散空间，则如例 1.2 所示，由其中之一空间到另一空间的任何函数都是连续的。因此，X 与 Y 同胚的充要条件是它们之间有一个 1—1 与到上函数存在，也就是说，它们等势。

命题 7.7 在任何拓扑空间簇中，用"X 同胚于 Y"来定义的关系是一个等价关系。

于是，根据等价关系的基本定理可知：任何拓扑空间簇可以按拓扑等价关系进行分割。

拓扑性质 (Topological properties)

关于集的某个性质 P 如果满足以下条件："若有一个拓扑空间 (X, τ) 具备性质 P，则每个与 (X, τ) 同胚的拓扑空间也具备这个性质"，则此性质 P 称为一个**拓扑**性质 (topological property) 或称为一个**拓扑不变性** (topological invariant)。

例 4.1 在例 3.1 中已说明实直线 $\mathbf{R}$ 同胚于开区间 $X=(-1, 1)$。因此由于 X 和 $\mathbf{R}$ 的长度不同，所以"**长度**"(length) 不是拓扑性质。此外，"**有界性**"(boundedness) 也不是拓扑性质，因为 X 有界而 $\mathbf{R}$ 无界。

例 4.2 设 X 为正实数，即 $X=(0, \infty)$。用 $f(x)=1/x$ 定义的函数 $f: X\to X$ 是由 $X\to X$ 的一个同胚映照。现在考察数列

$$\langle a_n\rangle=\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\rangle$$

在同胚映照下，它对应于数列

$$\langle f(a_n)\rangle=\langle 1, 2, 3, \cdots\rangle。$$

数列 $\langle a_n\rangle$ 是 Cauchy 数列，而数列 $\langle f(a_n)\rangle$ 则不是，因此"是 Cauchy 序列"这个性质不是一个拓扑性质。

拓扑学的主要任务就是研究某些拓扑性质（诸如紧致性(compactness)，连通性 (connectedness)等）所产生的结果。事实上，正式地说拓扑学是研究拓扑不变性的学科。下面的例子说明什么叫连通性，和证明它是一种拓扑性质。

例 4.3 一个拓扑空间(X, τ)称为非连通的(disconnected)，是指它可表为两个非空而且互斥的开集之并，即

$X=G\cup H$，其中 $G, H\in\tau$，$G\cap H=\varnothing$ 但 $G, H\neq\varnothing$。

设 $f: X\to Y$ 是一个同胚映照，则

$$X=G\cup H \text{ 当且仅当 } Y=f[G]\cup f[H]。$$

因此，Y 为非连通的，当且仅当 X 是非连通的。

当(X, τ)不是非连通时，就称它为**连通的**(connected)。

由函数诱生的拓扑（Topologies induced by functions）

设$\{(Y_i, \tau_i)\}$为一拓扑空间簇；又设对于每个 Y_i 存在着一个由非空集X到 Y_i 的函数 f_i: $X\to Y_i$。我们将要探讨X上的那种拓扑，它使所有的 f_i 都能成为连续函数。为此，注意：要求 f_i 相对于X上的某种拓扑为连续就是要求 Y_i 中每个开集的逆象是X中的开集。因此，我们要考察下列X上的子集组

$$\mathcal{S}=\bigcup_i\{f_i^{-1}[H]: H\in\tau_i\}$$

就是说，$\mathcal{S}$是由每个 Y_i 中一切开集之逆象所构成。X 上由

$\mathcal{S}$产生的拓扑 τ 称为由函数集 $\{f_i\}$ **诱生的**(induced by $\{f_i\}$)或**产生的**(generated by $\{f_i\}$)拓扑。这种拓扑 τ 的主要性质罗列在下面的定理中：

定理 7.8

(i) 相对于拓扑 τ，每个函数 f_i 都是连续的。

(ii) τ 是 X 上所有那样一类拓扑的交，对于每个这类拓扑来说，每个 f_i 都是连续的。

(iii) τ 是 X 上使得每个 f_i 都是连续的这类拓扑中最小的、亦即最粗糙的一个。

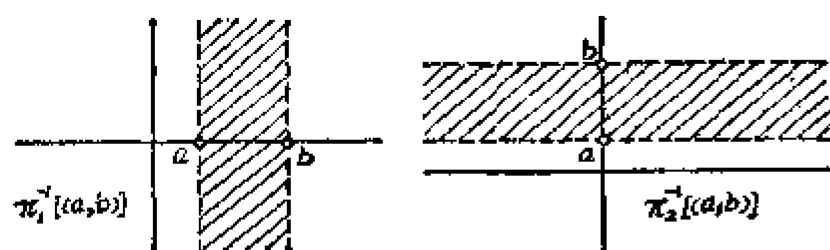
(iv) $\mathcal{S}$是拓扑 τ 的一个准基。

我们以后把 $\mathcal{S}$ 称为由函数集 $\{f_i\}$ 诱生的拓扑 τ（即：使每个 f_i 都连续的这类拓扑中最粗糙的一个）的**定义准基**(defining subbase)。

例 5.1 设 π_1 和 π_2 分别为由 $\mathbf{R}^2$ 向 $\mathbf{R}$ 的射影：

$$\pi_1(\langle x, y\rangle)=x$$
$$\pi_2(\langle x, y\rangle)=y$$

则如下图所示，$\mathbf{R}$ 中开区间 (a, b) 的逆象是 $\mathbf{R}^2$ 中的无限开带域。



我们知道，这些无限开带域构成 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑的一个准基。因此，$\mathbf{R}^2$ 上的通常拓扑是使射影 π_1 与 π_2 都连续的最粗拓扑。

习 题 解 答

连续函数

1. 求证：设 f: $X\to Y$ 是常值函数，例如对于每个 $x\in X$ 都有 $f(x)=p\in Y$，则相对于 X 上的任何拓扑 τ 及 Y 上的任何拓扑 τ^*，f 都是连续的。

解：我们要证的是：Y 中任何 τ^*-开集的逆象都是 X 中的 τ-开集。为此，设 $H\in\tau^*$。因对任何 $x\in X$ 有 $f(x)=p$，故

$$f^{-1}[H]=\begin{cases} X & 若\ p\in H \\ \varnothing & 若\ p\notin H \end{cases}$$

而 X 和 $\varnothing$ 属于 X 上的任何拓扑 τ，因此由这个等式可知，在任何情况下，$f^{-1}[H]$ 都是 X 的一个开子集。

2. 设已给函数 f: $X\to Y$，求证，若 $(Y, \mathscr{I})$ 是不可分空间，则对于 X 上的任何拓扑 τ 来说，f: $(X, \tau)\to(Y, \mathscr{I})$ 都是连续的。

解：我们要证的是：Y 中任何开集的逆象都是 X 中的开集。

因 $(Y, \mathscr{I})$ 是不可分空间，故 Y 中的开集只有 Y 与 $\varnothing$。但

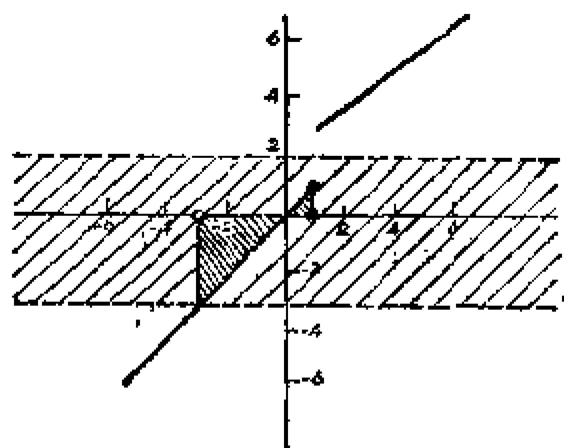
$$f^{-1}[Y]=X$$
$$f^{-1}[\varnothing]=\varnothing$$

而对于 X 上的任何拓扑来说，X 与 $\varnothing$ 都是 X 中的开集。因此对于 X 上的任何拓扑来说，f 都是连续的。

3. 设 $\mathscr{U}$ 为实直线 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑；τ 是 $\mathbf{R}$ 上的上极

限拓扑，即由一切形如$(a, b]$的左开右闭区间所产生的拓扑。另外，设 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由下式定义：

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{当 } x\leqslant 1 \\ x+2 & \text{当 } x>1 \end{cases}$$ （见下图）



（ i ）求证 f 不是 $\mathscr{U}$-$\mathscr{U}$ 连续。

（ ii ）求证 f 是 τ-τ 连续。

解：(i) 令 $A=(-3, 2)$，则 $f^{-1}[A]=(-3, 1]$。现在 $A\in\mathscr{U}$ 而 $f^{-1}[A]\notin\mathscr{U}$，故 f 不是 $\mathscr{U}$-$\mathscr{U}$ 连续。

(ii) 设 $A=(a, b]$，则

$$f^{-1}[A]=\begin{cases} (a, b] & \text{若 } a<b\leqslant 1 \\ (a, 1] & \text{若 } a<1<b\leqslant 3 \\ (a, b-2] & \text{若 } a<1<3<b \\ \varnothing & \text{若 } 1\leqslant a<b\leqslant 3 \\ (1, b-2) & \text{若 } 1\leqslant a<3<b \\ (a-2, b-2) & \text{若 } 3\leqslant a<b \end{cases}$$

在每一种情况下，$f^{-1}[A]$ 都是 τ-开集。所以 f 是 τ-τ 连续。

4. 设函数 f: $(X, \tau_1)\to(Y, \tau_2)$ 不是 τ_1-τ_2 连续。求证：若 τ_1^* 是 X 上比 τ_1 粗的拓扑，τ_2^* 是 Y 上比 τ_2 精的拓

扑，即 $\tau_2^* \subset \tau_1$，$\tau_2 \subset \tau_2^*$，则 f 也不是 τ_1^*-τ_2^* 连续的。

解：因 f：$(X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ 不连续，故有 $G \in \tau_2$，使 $f^{-1}[G] \notin \tau_1$。

现在，$\tau_1^* \subset \tau_1$ 及 $\tau_2 \subset \tau_2^*$。因此由 $G \in \tau_2$ 得 $G \in \tau_2^*$，而由 $f^{-1}[G] \notin \tau_1$ 得 $f^{-1}[G] \notin \tau_1^*$。故 f 也不是 τ_1^*-τ_2^* 连续的。

5. 求证：恒等函数 i：$(X, \tau) \to (X, \tau^*)$ 成为连续的充要条件是 τ 精于 τ^*，即 $\tau^* \subset \tau$。

解：由定义，i 成为 τ-τ^* 连续的充要条件是：由 $G \in \tau^*$ 便得 $i^{-1}[G] \in \tau$。但 $i^{-1}[G] = G$，故 i 成为 τ-τ^* 连续的充要条件是

$$\text{由 } G \in \tau^* \text{ 便得 } G \in \tau$$

就是说，$\tau^* \subset \tau$。

6. 求证定理 7.2：设 f：$(X, \tau) \to (Y, \tau^*)$。又设 $\mathcal{S}$ 是 Y 上的拓扑 τ^* 的一个准基，则 f 为连续的充要条件是 $\mathcal{S}$ 中每个集的逆象都是 X 的开集，即，对于每个 $S \in \mathcal{S}$ 来说，都有 $f^{-1}[s] \in \tau$。

解：假设对每个 $S \in \mathcal{S}$ 都有 $f^{-1}[s] \in \tau$。要证：f 连续，即要证：由 $G \in \tau^*$ 便得 $f^{-1}[G] \in \tau$。设 $G \in \tau^*$，则由准基的定义得

$$G = \bigcup_i (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i n_i}), \text{ 其中 } S_{i_k} \in \mathcal{S}$$

于是，$f^{-1}[G] = f^{-1}[\bigcup_i (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i n_i})]$

$$= \bigcup_i f^{-1}[S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i n_i}]$$

$$= \bigcup_i (f^{-1}[S_{i_1}] \cap \cdots \cap f^{-1}[S_{i n_i}])$$

但 $S_{i_k} \in \mathcal{S}$，故 $f^{-1}[S_{i_k}] \in \tau$。因此，$f^{-1}[G] \in \tau$，因为它是

开集的有限交的并。所以 f 是连续的。

反之，设 f 连续，则任何开集之逆象是开集，特别是 $\mathcal{S}$ 中的元素的逆象是开集。

7. 设 f 是由拓扑空间 X 到单位区间 $[0, 1]$ 的函数。求证：若对于所有的 $0<a$, $b<1$ 来说，$f^{-1}[(a, 1]]$ 与 $f^{-1}[[0, b)]$ 都是 X 的开集，则 f 是连续的。

解：只须注意形如 $(a, 1]$ 及 $[0, b)$ 的一切区间构成 $I=[0, 1]$ 上的一个准基。于是由定理 7.2 可知 f 是连续的。

8. 求证：若函数 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$ 都连续，则复合函数 $g\circ f: X\to Z$ 也连续。

解：设 G 是 Z 的一个开集，则因 g 连续，故 $g^{-1}[G]$ 在 Y 内是开的。但 f 也是连续的，故 $f^{-1}[g^{-1}[G]]$ 在 X 内是开的。现在

$$(g\circ f)^{-1}[G]=f^{-1}[g^{-1}[G]]$$

于是 $(g\circ f)^{-1}[G]$ 对于 Z 中的任何开集 G 来说，是 X 内的开集。因此，$g\circ f$ 连续。

9. 求证：设 $\{\tau_i\}$ 是 X 上的拓扑簇；又设函数 $f: X\to Y$ 对于每个 τ_i 都连续。则 f 对于交拓扑 $\tau=\bigcap_i \tau_i$ 也是连续的。

解：设 G 是 Y 中的一个开集，则由假设，$f^{-1}[G]$ 属于每个 τ_i，因此 $f^{-1}[G]$ 属于 τ_i 的交，即 $f^{-1}[G]\in\bigcap_i \tau_i=\tau$，所以 f 对于 τ 连续。

10. 求证定理 7.3：函数 $f: X\to Y$ 为连续，当且仅当 Y 的任何闭集的逆象是 X 的闭集。

解：假设 $f: X\to Y$ 是连续的，又设 F 是 Y 的闭集。则 F^c 是开的，所以 $f^{-1}[F^c]$ 在 X 内是开集。但 $f^{-1}[F^c]=(f^{-1}$

$[F])^c$；因此 $f^{-1}[F]$ 是闭的。

反之，假设由 F 在 Y 内为闭便得 $f^{-1}[F]$ 在 X 内为闭。又设 G 是 Y 的一个开子集。则 G^c 在 Y 内为闭，所以 $f^{-1}[G^c] = (f^{-1}[G])^c$ 在 X 内为闭。从而，$f^{-1}[G]$ 是开集，所以 f 连续。

11. 求证定理 7.4：函数 $f: X\to Y$ 为连续，当且仅当对于任何 $A\subset X$，有 $f[\bar{A}]\subset\overline{f[A]}$。

解：设 $f: X\to Y$ 连续。因 $f[A]\subset\overline{f[A]}$，故

$$A\subset f^{-1}[f[A]]\subset f^{-1}[\overline{f[A]}],$$

但 $\overline{f[A]}$ 是闭集，故 $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ 也是闭集。于是由上式得

$$A\subset \bar{A}\subset f^{-1}[\overline{f[A]}],$$

从而

$$f[\bar{A}]\subset f[f^{-1}[\overline{f[A]}]]=\overline{f[A]}。$$

现在反过来假设 $f[\bar{A}]\subset\overline{f[A]}$ 对任何 $A\subset X$ 成立。令 F 为 Y 中一闭集，并令 $A=f^{-1}[F]$。我们要证 A 也是闭集，即要证 $A=\bar{A}$。

但 $f[\bar{A}]=f[\overline{f^{-1}[F]}]$

$$\subset\overline{f[f^{-1}[F]]}=\bar{F}=F,$$

故

$$\bar{A}\subset f^{-1}[f[\bar{A}]]\subset f^{-1}[F]=A,$$

而 $A\subset\bar{A}$，所以 $A=\bar{A}$。这就证明了 f 是连续的。

12. 求证：设 $f: (X, \tau)\to(Y, \tau^*)$ 连续，则当 $A\subset X$，而 f_A 是 f 在 A 上的收缩时，$f_A: (A, \tau_A)\to(Y, \tau^*)$ 是连续的。

解：注意：对于任何 $G\subset Y$，有 $f_A^{-1}[G]=A\cap f^{-1}[G]$。现在设 $G\in\tau^*$，则 $f^{-1}[G]\in\tau$。从而由诱生拓扑的定义得

$A\cap f^{-1}[G]\in\tau_A$，于是 $A\cap f^{-1}[G]=f_A{}^{-1}[G]\in\tau_A$。故 f_A 连续。

在一点的连续性

13．在什么条件下 $f: X\to Y$ 在一点 $p\in X$ 不连续？

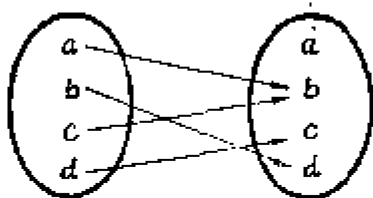
解：所谓 $f: X\to Y$ 在 $p\in X$ 连续是指：对于任何含 $f(p)$ 的开集 $H\subset Y$ 来说，$f^{-1}[H]$ 是含 p 点的开集之母集。因此，f 在 p 点不连续是指：至少有一个含 $f(p)$ 的开集 $H\subset Y$ 使得 $f^{-1}[H]$ 不含有含 p 的开集。

换种说法，$f: X\to Y$ 在 $p\in X$ 为不连续，当且仅当有 $f(p)$ 的一个邻域 $\mathcal{N}$ 存在，使 $f^{-1}[\mathcal{N}]$ 不是 p 点的一个邻域。

14．考察 $X=\{a, b, c, d\}$ 上的拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}。$$

设函数 $f: X\to X$ 由附图所定义。



（i）求证：f 在 c 不连续。

（ii）求证：f 在 d 连续。

解：(i) 注意 $\{a, b\}$ 是一个含 $f(c)=b$ 的开集，且 $f^{-1}[\{a, b\}]=\{a, c\}$。因此 f 在 c 不连续，因为不存在一个含 c 的开集，而被包含在 $\{a, c\}$ 内。

(ii) 注意：含 $f(d)=c$ 的开集只有 $\{b, c, d\}$ 及 X，而 $f^{-1}[\{b, c, d\}]=X$ 及 $f^{-1}[X]=X$，由此可知 f 在 d 连续，因为每个含 $f(d)$ 的开集的逆象都是一个含 d 的开集。

15．设单元素集 $\{p\}$ 是拓扑空间 X 的一个开集。求证：对于任何拓扑空间 Y 来说，任何函数 $f: X\to Y$ 都在 $p\in X$ 连续。

解：设 $H \subset Y$ 是含 $f(p)$ 的一个开集。

$$f(p) \in H \Longrightarrow p \in f^{-1}[H] \Longrightarrow \{p\} \subset f^{-1}[H],$$

因此，f 在 p 点连续。

16. 求证：若 f: $X \to Y$ 在 $p \in X$ 连续，则 f 在一个含 p 点的子集上的收缩也必在 p 点处连续。更确切地说：设 A 是拓扑空间 (X, τ) 的一个子集使 $p \in A \subset X$，并设 f_A: $A \to Y$ 是 f: $X \to Y$ 在 A 上的收缩。则当 f 在 p 是 τ-连续时，f_A 便在 p 是 τ_A-连续。其中 τ_A 表示 A 上的相对拓扑。

解：设 $H \subset Y$ 是含 $f(p)$ 的一个开集。由于 f 在 p 连续，故

$$\text{有 } G \in \tau \text{ 使 } p \in G \subset f^{-1}[H],$$

于是

$$p \in A \cap G \subset A \cap f^{-1}[H] = f_A^{-1}[H]。$$

但由相对拓扑的定义得：$A \cap G \in \tau_A$，故 f_A 在 p 点 τ_A-连续。

17. 求证定理 7.5：设 X, Y 为拓扑空间，则函数 f: $X \to Y$ 为连续的充要条件是它在每一点 $p \in X$ 都连续。

解：设 f 连续，又设 $H \subset Y$ 是含 $f(p)$ 的一个开集，则 $p \in f^{-1}[H]$，且 $f^{-1}[H]$ 是开集。从而 f 在 p 点连续。

现在设 f 在每一点 $p \in X$ 连续，又设 $H \subset Y$ 是开集。对每点 $p \in f^{-1}[H]$，有开集 $G_p \subset X$ 存在，使 $p \in G_p \subset f^{-1}[H]$。从而 $f^{-1}[H] = \bigcup \{G_p: p \in f^{-1}[H]\}$ 为开集之并，从而 $f^{-1}[H]$ 是开集，所以 f 是连续函数。

18. 求证命题 7.6：若函数 f: $X \to Y$ 在 $p \in X$ 连续，则它在 p 是序列连续，即：$a_n \to p \Longrightarrow f(a_n) \to f(p)$。

解：要证的是：$f(p)$ 的任何邻域 N 都含序列 $\{f(a_1),$

$f(a_2), \cdots\}$ 中的几乎所有的项。

现在设 N 是 $f(p)$ 的一个邻域。按假设，f 在 p 连续，故 $M=f^{-1}[N]$ 是 p 点的一个邻域。当序列 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 p 时，M 将含有 $\langle a_n\rangle$ 的几乎所有的项，而

$$a_n\in M\Longrightarrow f(a_n)\in f[M]=f[f^{-1}[N]]=N,$$

从而几乎所有的 $n\in\mathbf{N}$ 都使 $f(a_n)\in N$，这就是说序列 $\langle f(a_n)\rangle$ 收敛于 $f(p)$。因此 f 在 p 序列连续。

开函数，闭函数，同胚映照

19．试举一例说明实函数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的又是闭的，但不是开的。

解：设 f 是一个常值函数，例如，令 $f(x)=1$ 对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，则对任何 $A\subset\mathbf{R}$ 有 $f[A]=\{1\}$，由此可见，f 是闭的，也是连续的，但它不是开的。

20．设实函数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由 $f(x)=x^2$ 定义。求证：f 不是开的。

解：考察开集 $A=(-1, 1)$。则因 $f[A]=[0, 1)$ 不是开集，故 f 不是开函数。

21．设 $\mathscr{B}$ 为拓扑空间 X 的一个基。求证：若 $f: X\to Y$ 有以下性质：对于每个 $B\in\mathscr{B}$ 来说，$f[B]$ 是开的。则 f 是一个开函数。

解：要证的是 X 中任何开集的象都是 Y 中的一个开集。为此，设 $G\subset X$ 是开集。则由基的定义得

$$G=\bigcup_i B_i,\ \text{其中}\ B_i\in\mathscr{B}$$

而 $f[G]=f[\bigcup_i B_i]=\bigcup_i f[B_i]$。按假设每个 $f[B_i]$ 是 Y 中的开集，故 $f[G]$ 作为 Y 中的开集之并也是 Y 中的开集。这说

明 f 是开函数。

22．求证：闭区间 $A=[a, b]$ 同胚于闭单位区间 $I=[0, 1]$。

解：由 $f(x)=(b-a)x+a$ 定义的线性函数 f: $I\to A$ 是 1—1、到上又是双连续，故 f 是一个同胚映照。

23．求证：面积不是拓扑性质。

解：以 1 为半径的开盘 $D=\{\langle r, \theta\rangle: r<1\}$ 和以 2 为半径的开盘 $D^*=\{\langle r, \theta\rangle: r<2\}$ 是同胚的，这是因为由 $f(\langle r, \theta\rangle)=\langle 2r, \theta\rangle$ 定义的函数 f: $D\to D^*$ 是一个同胚映照。其中 $\langle r, \theta\rangle$ 表示平面 $\mathbf{R}^2$ 上一点的极坐标。

24．设 f: $(X, \tau)\to(Y, \tau^*)$ 是 1—1 的又是开的。又设 $f[A]=B$，其中 $A\subset X$。求证：f_A: $(A, \tau_A)\to(B, \tau_B^*)$ 也是 1—1 的又是开的，其中 f_A 表示 f 在 A 上的收缩，τ_A 与 τ_B^* 是相对拓扑。

解：当 f 是 1—1 时，它的任何收缩也是 1—1 的。所以只需证 f_A 是开的。

设 $H\subset A$ 是 τ_A-开集，则由相对拓扑的定义知：有 $G\in\tau$ 使 $H=A\cap G$。现因 f 是 1—1 的，故

$$f[A\cap G]=f[A]\cap f[G]$$

从而

$$f_A[H]=f[H]=f[A\cap G]=f[A]\cap f[G]=B\cap f[G],$$

而 f 是开函数，且 $G\in\tau$，故 $f[G]\in\tau^*$。于是 $B\cap f[G]\in\tau_B^*$。所以 f_A: $(A, \tau_A)\to(B, \tau_B^*)$ 是开的。

25．设 f: $(X, \tau)\to(Y, \tau^*)$ 是同胚映照，又设 (A, τ_A) 是 (X, τ) 的一个子空间，求证：f_A: $(A, \tau_A)\to(B, \tau_B^*)$ 也是一个同胚映照，其中 f_A 表示 f 在 A 上的收缩，$f[A]=B$，

$\tau_B{}^*$ 表示 B 上的相对拓扑。

解：因 f 是 1—1 与到上，故 f_A: $A\to B$ 也是 1—1 与到上，其中 $B=f[A]$。因此只需证 f_A 是双连续的，即：是开的又是连续的。由前一习题知 f_A 是开的。又：任何连续函数在子空间上的收缩仍为连续，故 f_A:$(A, \tau_A)\to B, \tau_B{}^*)$ 是一个同胚映照。

26. 求证：任何区间 (a, b) 作为实直线 $\mathbf{R}$ 的一个子空间是连通的(关于连通的定义，可参考例 4.3)。

解：设 A 不连通，则存在着开集 G, $H\subset\mathbf{R}$, 使 $A\cap G$ 与 $A\cap H$ 均非空集，互斥，而又使 $(A\cap G)\cup(A\cap H)=A$。现在定义函数 f: $A\to\mathbf{R}$ 为

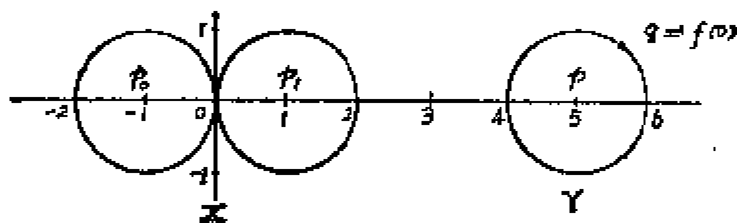
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in A\cap G\\ 0 & \text{当 } x\in A\cap H\end{cases}$$

则因任何开集之逆或为 $A\cap G$, 或为 $A\cap H$, 或为 $\varnothing$ 或为 A, 都是开集。故 f 是连续函数。但对连续函数说来，介值定理成立，从而有 $x_0\in A$ 使 $f(x_0)=\frac{1}{2}$。但这不可能，故 A 是连通的。

27. 求证：下列 $\mathbf{R}^2$ 的子集不是互相同胚的，其中的拓扑是指相对的通常拓扑：

$$X=\{x; d(x, p_0)=1 \text{ 或 } d(x, p_1)=1;$$
$$p_0=\langle 0, -1\rangle, p_1=\langle 0, 1\rangle\}$$
$$Y=\{x; d(x, p)=1, p=\langle 0, 5\rangle\}。$$

解：设有同胚映照 f: $X\to Y$ 存在。令 $q=f(0)$, $X^*=X\setminus\{0\}$, $Y^*=Y\setminus\{q\}$, 则由习题 25 知：对于相对拓扑来说，f: $X^*\to Y^*$ 是同胚映照。



现在来证明 Y^* 是连通的。因若 $q=\langle 5+\cos\theta_0, \sin\theta_0\rangle$，则由下面公式

$$g(\theta)=\langle 5+\cos(\theta_0+\theta), \sin(\theta_0+\theta)\rangle$$

定义的函数 $g: (0, 2\pi)\to Y^*$，是一个同胚映照。而 $(0, 2\pi)$ 是连通的，所以 Y^* 也是连通的。

另一方面，X^* 是不连通的，因为下列二集

$$G=\{\langle x, y\rangle: x>0\} \text{ 及 } H=\{\langle x, y\rangle: x<0\}$$

都是 $\mathbf{R}^2$ 的开集，因此 $G^*=X^*\cap G$ 及 $H^*=X^*\cap H$ 是 X^* 的开集。此外，G^* 与 H^* 都是非空集，它们互斥，并且满足 $G^*\cup H^*=X^*$。所以 X^* 非连通。而连通性是拓扑性质，这说明 X^* 与 Y^* 不是同胚的。因此上述的同胚映照 f 是不存在的。

由函数诱生的拓扑

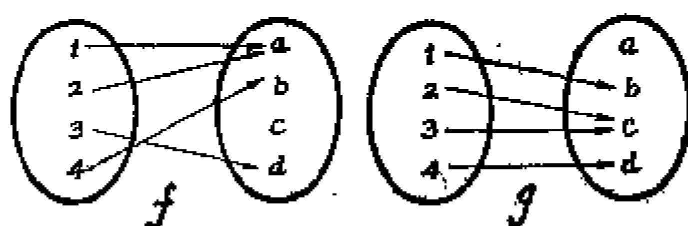
28．设 $\{f_i: X\to(Y_i, \tau_i)\}$ 是由一个任意集 X 到拓扑空间 (Y_i, τ_i) 的常值函数簇，求 X 上使所有的 f_i 都连续的最粗拓扑。

解： 由习题 1 知，对于 X 上的任何拓扑来说，常值函数都是连续的。因此所有的常值函数 f_i 相对于 X 上的不可分拓扑 $\{X, \varnothing\}$ 来说都是连续的。而 X 上的最粗拓扑是不可分拓扑。所以所求的最粗拓扑就是 X 上的不可分拓扑。

29．考察 $Y=\{a, b, c, d\}$ 上的拓扑：

$$\tau=\{Y, \varnothing, \{c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$$

令 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 并令 $f: X\to(Y, \tau)$ 及 $g: X\to(Y, \tau)$ 由下面的图定义



求 X 上由 f 与 g 诱生的拓扑的定义准基 $\mathcal{S}$，即：使 f 与 g 都连续的最粗拓扑的定义准基。

解：我们知道

$$\mathcal{S}=\{f^{-1}[H]: H\in\tau\}\cap\{g^{-1}[H]: H\in\tau\}$$

即 $\mathcal{S}$ 是由 Y 的开子集在 f 和 g 下的逆所组成。因此

$$\mathcal{S}=\{X, \varnothing, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}。$$

30．设 τ 为实直线 $\mathbf{R}$ 上由一切左闭右开区间 $[a, b)$ 所产生的拓扑，τ^* 为 $\mathbf{R}$ 上由形如

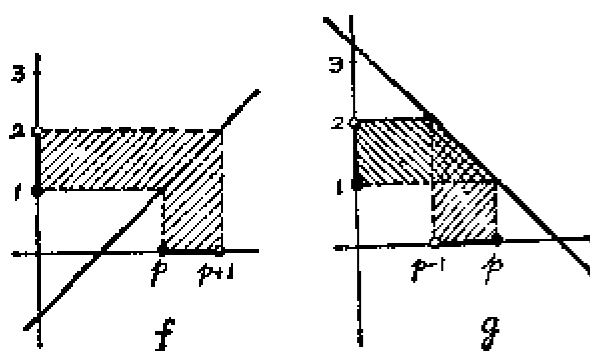
$$f(x)=ax+b, \ a, b\in\mathbf{R}$$

所定义的一切线性函数 $f: \mathbf{R}\to(\mathbf{R}, \tau)$ 所诱生的拓扑。求证：τ^* 是 $\mathbf{R}$ 上的离散拓扑。

解：我们要证的是：对于每点 $p\in\mathbf{R}$ 来说，单元素集 $\{p\}$ 是一个 τ^*-开集。为此，考察 τ-开集 $A=[1, 2)$ 及由下列二式

$$f(x)=x-p+1 \text{ 及 } g(x)=-x-p+1$$

所定义的线性函数 $f: \mathbf{R}\to(\mathbf{R}, \tau)$ 及 $g: \mathbf{R}\to(\mathbf{R}, \tau)$，它们的图形如下：



现在因 $A\in\tau$，故

$$f^{-1}[A]=[p,\ p+1)\ 及\ g^{-1}[A]=(p-1,\ p]$$

应属于拓扑 τ^* 的准基 $\mathcal{S}$。从而它们的交

$$(p-1,\ p]\cap[p,\ p+1)=\{p\}$$

属于 τ^*。因此 τ^* 是 **R** 上的离散拓扑。

31．求证定理7.9：设 $\{f_i:\ X\to(Y_i,\ \tau_i)\}$ 是定义在非空集 X 上的函数簇，又设

$$\mathcal{S}=\{f_i^{-1}[H]:\ H\in\tau_i\},$$

τ 为 X 上由 $\mathcal{S}$ 所产生的拓扑，则

(i) 相对于拓扑 τ 来说，所有的函数 f_i 都是连续函数。

(ii) 若 τ^* 是 X 上的使所有 f_i 都连续的那种拓扑之交，则 $\tau^*=\tau$。

(iii) τ 是 X 上的使所有 f_i 都连续的这种拓扑中最粗的拓扑。

(iv) $\mathcal{S}$ 是 τ 的一个准基。

解：(i) 对于任何函数 f_i：$(X,\ \tau)\to(Y_i,\ \tau_i)$，若 $H\in\tau_i$，则 $f_i^{-1}[H]\in\mathcal{S}\subset\tau$，因此相对于 τ 来说每个 f_i 都连续。

(ii) 由习题9可知，每个 f_i 都相对于 τ^* 为连续，因此 $\mathcal{S}\subset\tau^*$。而 τ 是由 $\mathcal{S}$ 产生的拓扑，故 $\tau\subset\tau^*$。另一方面，τ 是使所有 f_i 均为连续的一种拓扑，所以 $\tau^*\subset\tau$。合起来就得

$\tau \cdot \tau^*$。

(iii) 由 (ii) 知之。

(iv) 因为任何集组都是它所产生的拓扑的一个准基。

补 充 习 题

连续函数

32. 求证 $f: X \to Y$ 是连续的，当且仅当对每一 $A \subset X$ 有 $f^{-1}[A^\circ] \subset (f^{-1}[A])^\circ$。

33. 设 X 与 Y 是两个拓扑空间，且 $X = E \cup F$。设 $f: E \to Y$，$g: F \to Y$，在 $E \cap F$ 上 $f = g$，关于相对拓扑 f, g 是连续的。注意 $h = f \cup g$ 是从 X 到 Y 内的一个函数。(i) 举例说明 h 不必是连续的。(ii) 求证：若 E 与 F 两者皆开，则 h 连续。(iii) 求证：若 E 与 F 两者皆闭，则 h 连续。

34. 设 $f: X \to Y$ 是连续的。求证 $f: X \to f[X]$ 也是连续的，其中 $f[X]$ 有相对拓扑。

35. 设 X 是一个拓扑空间，设 $\chi_A: X \to \mathbf{R}$ 是 X 某个子集 A 的特征函数。求证 χ_A 在 $p \in X$ 处连续当且仅当 p 不是 A 的边界元素（注意 $\chi_A(x) = 1$ 若 $x \in A$，$\chi_A(x) = 0$ 若 $x \in A^c$）。

36. 考虑具有通常拓扑的实直线 $\mathbf{R}$。求证若每一函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 连续，则 X 是离散空间。

开函数与闭函数

37. 设 $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$，求证：

(i) f 是闭的当且仅当对每个 $A \subset X$ 有 $\overline{f[A]} \subset f[\bar{A}]$。

(ii) f 是开的当且仅当对每个 $A \subset X$ 有 $(f[A])^\circ \subset f[A^\circ]$。

38. 求证由 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 所定义的函数 f: $(0, \infty)\to[-1, 1]$ 是连续的，但既不是开的，也不是闭的，其中 $(0, \infty)$ 与 $[-1, 1]$ 有相对的通常拓扑。

39. 求证：设 f: $(X, \tau)\to(Y, \tau^*)$ 是开的且到上的，并设 $\mathscr{B}$ 是 τ 的基，则 $\{f[B]: B\in\mathscr{B}\}$ 是 τ^* 的一个基。

40. 试举一例说明：函数 f: $X\to Y$ 和子集 $A\subset X$，f 是开的，但 f 在 A 上的收缩 f_A 不是开的。

同胚映照拓扑性质

41. 设 f: $X\to Y$ 与 g: $Y\to Z$ 是连续的。求证若 $g\circ f$: $X\to Z$ 是一个同胚映照，则 g 是 1—1 映照（或 f 是到上映照）导致 f 与 g 是同胚映照。

42. 求证下面的每一个性质是拓扑性质：(i) 聚点，(ii) 内集，(iii) 边界，(iv) 稠密性，(v) 邻域。

43. 求证：设 f: $X\to Y$ 是一个同胚映照，又设 $A\subset X$ 具有性质：$A\cap A'=\varnothing$，则 $f[A]\cap(f[A])'=\varnothing$。(具有性质：$A\cap A'=\varnothing$ 的子集 $A\subset X$ 称为孤立集。因而使一集成为孤立集的性质是一个拓扑性质。)

由函数所诱生的拓扑

44. 考虑 $Y=\{a, b, c, d\}$ 上的如下拓扑：$\tau=\{Y, \varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$。设 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，又设 f: $X\to Y$ 与 g: $X\to Y$ 定义如下：

$$f=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, b\rangle, \langle 5, d\rangle\},$$
$$g=\{\langle 1, c\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 5, c\rangle\}$$

求X上由f与g所诱生的拓扑τ的定义准基。

45. 设f: $X\to(Y, \tau^*)$。求证若$\mathscr{S}$是由一个函数f所诱生的拓扑τ的定义准基，则$\mathscr{S}=\tau$。

46. 求证：设$\{f_i: X\to(Y_i, \tau_i)\}$是在任意集$X$上定义的函数的集组，又设$\mathscr{S}_i$是$Y_i$上拓扑$\tau_i$的准基，则集组$\mathscr{S}^*=\bigcup_i\{f_i^{-1}[S]: S\in\mathscr{S}_i\}$有下面的性质：(i) $\mathscr{S}^*$是由函数f_i诱生的X上的拓扑τ的定义准基的一个子组。(ii) $\mathscr{S}^*$也是τ的一个准基。

47. 求证实直线$\mathbf{R}$上使由$f(x)=ax+b$, a, $b\in\mathbf{R}$所定义的线性函数f: $\mathbf{R}\to(\mathbf{R}, \mathscr{U})$连续的最粗的拓扑也是通常的拓扑$\mathscr{U}$。

补 充 习 题 答 案

33. (i) 设$X=(0, 2)$, $E=(0, 1)$, $F=[1, 2)$, 则$f(x)=1$与$g(x)=2$每一个都是连续的，但$h=f\cup g$不是连续的。

44. $\{X, \varnothing, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$。

45. 提示：证明$\mathscr{S}$是一个拓扑。

第八章　度量空间与赋范空间

度量（Metrics）

设X为非空集，定义在$X\times X$（即X的元素的有序偶全体）上的实值函数d若满足以下公理，则称为X上的**度量**（metric）或称X上的**距离函数**（distance function）：

对于任何$a, b, c\in X$，有：

[M_1] $d(a, b)\geqslant 0$ 及 $d(a, a)=0$，

[M_2]（对称性）$d(a, b)=d(b, a)$，

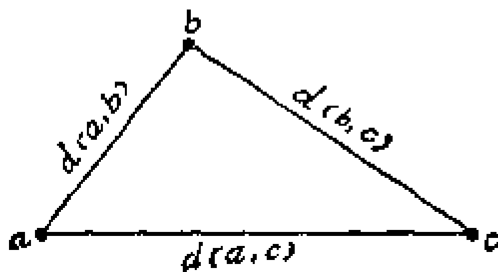
[M_3]（三角不等式）$d(a, c)\leqslant d(a, b)+d(b, c)$，

[M_4] 若$a\neq b$，则$d(a, b)>0$。

实数$d(a, b)$称为由a到b的**距离**（distance）。

公理[M_1]是说，由一点到另一点的距离永远不是负数，而一点到它本身的距离则为零。[M_2]是说由a到b的距离等于由b到a的距离；因此，我们可以称之为a与b两点之间的距离。

[M_3]称为三角不等式，因为若a, b, c是下图所示的平面$\mathbf{R}^2$上的点，则[M_3]是说三角形一边的长度$d(a, c)$小于或等于三角形其他两边的长度和$d(a, b)+d(b, c)$。



[M_4]是说，不同的两点

之间的距离总是正数。

现在举些度量的例子。它们确实满足度量公理，这一点将在以后证明。

例 1.1 当 a, b 为实数时，由 $d(a, b)=|a-b|$ 定义的函数 d 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的一个度量。这个度量称为 $\mathbf{R}$ 上的**通常度量**(usual metric)。类似地，对于平面 $\mathbf{R}^2$ 上两点 $p=(a_1, a_2)$ 及 $q=(b_1, b_2)$ 由公式

$$d(p, q)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

定义的函数 d 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个度量。它称为 **$\mathbf{R}^2$ 上的通常度量**。

以后，在没有特别声明时，对于 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}^2$ 我们都采用它们的通常度量。

例 1.2 设 X 为非空集。设 d 为由下面的公式定义的函数：

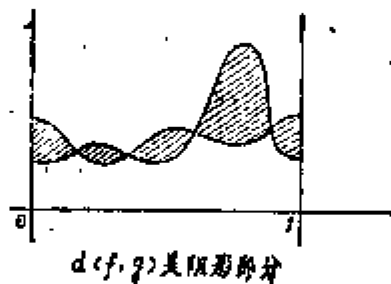
$$d(a, b)=\begin{cases}0 & 若\ a=b\\ 1 & 若\ a\neq b\end{cases}$$

则 d 是 X 上的一个度量。这个度量通常称为 X 上的**"平凡度量"**(trivial metric)。

例 1.3 设 $\mathscr{C}[0, 1]$ 表示单位闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数族，则下面的公式

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

给出 $\mathscr{C}[0, 1]$ 上的一个度量，其几何意义为两曲线之间的面积，如下图所示。

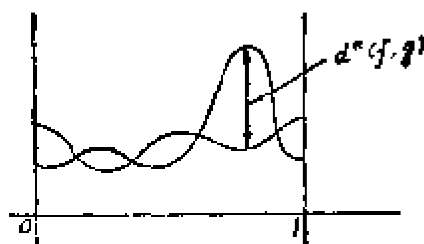


$d(f, g)$ 是阴影部分

例 1.4 仍设 $\mathscr{C}[0, 1]$ 表示 $[0, 1]$ 上的连续函数族。$\mathscr{C}[0,1]$ 上的另一个度量由下面的公式给出：

$$d^*(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)|;\ x\in[0, 1]\}$$

其几何意义是两曲线间的最大垂直空隙，如下图所示。



例 1.5 设 $p=(a_1, a_2)$,

$q=(b_1, b_2)$

为平面 $\mathbf{R}^2$（即实数的有序偶全体）上的任意两点，则下列二函数给出 $\mathbf{R}^2$ 上不同的两个度量：

$$d_1(p, q)=\max(|a_1-b_1|, |a_2-b_2|)$$
$$d_2(p, q)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|。$$

一个函数 ρ 若满足 $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$ 而不一定满足 $[M_4]$ 时，称为一个**“准度量”**（pseudometric）。关于度量的许多结论对于准度量也是成立的。

集之间的距离，直径（Distance between sets, diameters）

设 d 是集 X 上的度量。一点 $p\in X$ 与 X 的一个非空子集 A 之**距离**，记为 $d(p, A)$，是由下面的公式定义：

$$d(p, A)=\inf\{d(p, a);a\in A\}$$

即：它是点 p 与 A 中之点的距离的最大下界（即下确界）。

X 中两个非空集 A 与 B 的**距离**，记为 $d(A, B)$，是由下面的公式定义：

$$d(A, B)=\inf\{d(a, b):\ a\in A,\ b\in B\}$$

即：它是 A 中之点与 B 中之点的距离的最大下界。

X 中一个非空集 A 的**直径**(diameter)，记为 $d(A)$，是由下面的公式定义：

$$d(A)=\sup\{d(a, a');\ a, a'\in A\}$$

即：它是A中两点距离的最小上界(即上确界)。若A的直径有限，即$d(A)<\infty$，则称A为**有界**(bounded)**集**；否则，即当$d(A)=\infty$时，A称为**无界**(unbounded)**集**。

例2.1 设d为非空集X上的平凡度量，则对于$p\in X$与A，$B\subset X$，有

$$d(p, A)=\begin{cases}1 & 若\ p\notin A\\ 0 & 若\ p\in A\end{cases}$$

$$d(A, B)=\begin{cases}1 & 若\ A\cap B=\varnothing\\ 0 & 若\ A\cap B\neq\varnothing。\end{cases}$$

例2.2 考察实直线$\mathbf{R}$上的区间：$A=[0, 1)$及$B=(1, 2]$。若d表示$\mathbf{R}$上的通常度量，则$d(A, B)=0$。

另一方面，若d^*表示$\mathbf{R}$上的平凡度量，则因A，B互斥而得$d^*(A, B)=1$。

由上列各定义可得下面的命题：

命题8.1 设A, B为X的非空子集，又设$p\in X$，则

(i) $d(p, A)$, $d(A, B)$, $d(A)$均为非负实数；

(ii) 若$p\in A$，则$d(p, A)=0$；

(iii) 若$A\cap B$非空，则$d(A, B)=0$；

(iv) 若A有限，则$d(A)<\infty$，即A有界。

注意：(ii), (iii), (iv)之逆都不成立。

对于空集$\varnothing$，我们为方便起见，作如下规定：

$$d(p, \varnothing)=\infty;$$

$$d(A, \varnothing)=d(\varnothing, A)=\infty;$$

$$d(\varnothing)=-\infty。$$

开球(Open spheres)

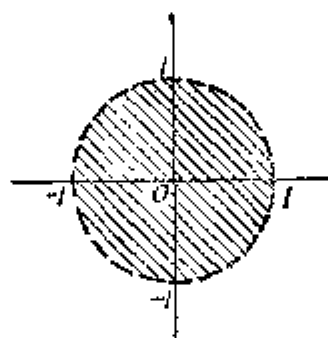
设d为集X上的一种度量，则对任何已知点$p\in X$及已

知实数 $\delta>0$，我们用 $S_d(p, \delta)$ 或简单地用 $S(p, \delta)$ 表示与 p 的距离不超过 δ 的点所构成的集

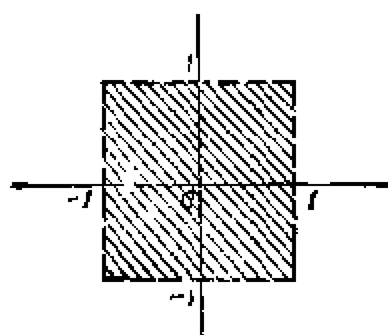
$$S(p, \delta)=\{x: d(p, x)<\delta\}$$

并称它为以 p 为中心，以 δ 为半径的开球 (open sphere)或简单地称为以 p 为中心，以 δ 为半径的球 (sphere)。它也称为一个球形邻域(spherical neighborhood)。

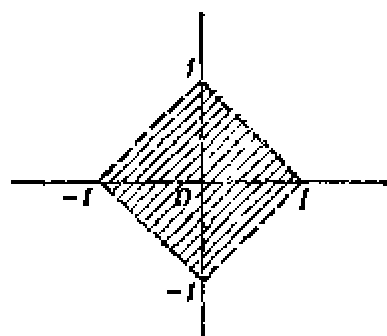
例 3.1 考察 $\mathbf{R}^2$ 上的点 $p=(0, 0)$ 及实数 $\delta=1$。若 d 表示 $\mathbf{R}^2$ 上的通常度量，则 $S_d(p, \delta)$ 是开的单位圆盘，如右图所示。



若 d_1, d_2 表示例 1.5 中所说的 $\mathbf{R}^2$ 上的度量，则 $S_{d_1}(p, \delta)$ 及 $S_{d_2}(p, \delta)$ 分别如下图所示。



$S_{d_1}(p, \delta)$ 是阴影部分



$S_{d_2}(p, \delta)$ 是阴影部分

例 3.2 设 d 表示集 X 上的平凡度量，又设 $p\in X$。则因 p 与 X 上其他点的距离恰好为 1，故

$$S(p, \delta)=\begin{cases}X & 若\ \delta>1\\ \{p\} & 若\ \delta\leqslant 1。\end{cases}$$

例 3.3 设 d 为实直线 $\mathbf{R}$ 上的通常度量，即

$$d(a, b)=|a-b|,$$

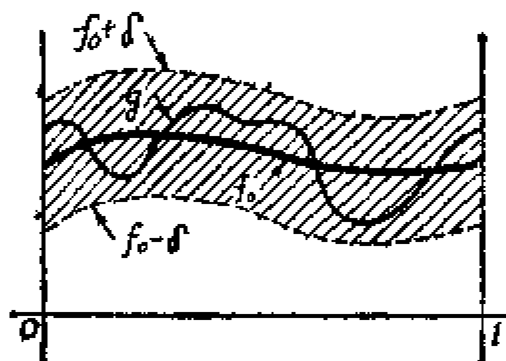
则开球 $S(p, \delta)$ 是开区间 $(p-\delta, p+\delta)$。

例 3.4 设 d 表示 $[0, 1]$ 上全体连续函数之簇 $\mathscr{C}[0, 1]$

上的度量，它由下面的公式定义：

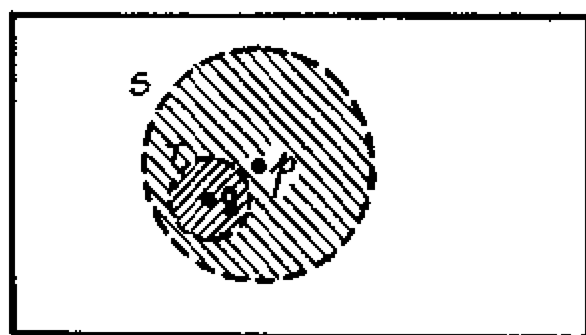
$$d(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)|: x\in[0, 1]\}$$

（参考例 1.4）。给定 $\delta>0$ 及一个函数 $f_0\in\mathscr{C}[0, 1]$ 后，开球 $S(f_0, \delta)$ 是由落在以 $f_0-\delta$ 和 $f^0+\delta$ 为边界的面积之内的一切连续函数 g 所构成，如下图所示。



下面的引理给出度量空间的开球的一个重要性质：

引理 8.2 设 S 是以 p 为中心，以 δ 为半径的开球，则对任何 $q\in S$，有以 q 为中心的开球 T 存在，使 T 包含在 S 内（参看下图）。



度量拓扑与度量空间（Metric topologies metric spaces）

一般说来，两个开球的交不是开球，但将证明两个开球之交中的每一点必属于包含在交中的某一开球。

引理 8.3 设 S_1 与 S_2 为开球，又设 $p\in S_1\cap S_2$，则有以 p 为中心的开球 S_p 存在，使 $p\in S_p\subset S_1\cap S_2$。于是由

定理6.1可得以下定理：

定理8.4 设已给集X及其上的度量d，则X中的一切开球所构成的组构成X上的一个拓扑的基。

定义 设d为非空集X上的一个度量，则由X中一切开球所产生的X上的拓扑τ称为**度量拓扑**(metric topology)或称为**由度量d所诱生的拓扑**(topology induced by the metric d)。集X连同由d所诱生的拓扑称为一个**度量空间**(metric space)，记为(X, d)。

度量空间是一种拓扑空间，其拓扑是由度量所诱生的。因此，关于拓扑空间所定义的一切概念对于度量空间来说也都有意义。例如，开集，闭集，邻域，聚点，闭包等等，在度量空间中都有意义。

例4.1 若d为实直线$\mathbf{R}$上的通常度量，即：

$$d(a, b)=|a-b|,$$

则$\mathbf{R}$中的开球就是有限开区间。因此$\mathbf{R}$上的通常度量在$\mathbf{R}$上诱生的就是通常拓扑。同样，平面$\mathbf{R}^2$上的通常度量在$\mathbf{R}^2$上诱生通常拓扑。

例4.2 设d为集X上的平凡度量，则对任何$p\in X$有$S\left(p, \frac{1}{2}\right)=\{p\}$，因此任何单点集是开集，从而任何集都是开集。换句话说，平凡度量在X上诱生的拓扑是离散拓扑。

例4.3 设(X, d)为度量空间，Y为X的非空子集。则函数d在Y上的收缩（也记为d）是Y上的度量。度量空间(Y, d)称为(X, d)的**度量子空间**(metric subspace)。实际上(Y, d)是(X, d)的子空间，就是说它具有相对拓扑。

通常，同一符号X既表示度量空间，也表示度量在其上定义的那个集。

度量拓扑的性质(Properties of metric topologies)

由于度量空间X的拓扑是由度量诱生的，故X的拓扑性质通常和X的距离性质有关，例如：

定理 8.5 设p为度量空间X的一点，则下列可数的开球组$\left\{S(p,1),S\left(p,\frac{1}{2}\right),S\left(p,\frac{1}{3}\right),\cdots\right\}$构成$p$点处的一个局部基。

定理 8.6 度量空间X中一个子集A的闭包$\overline{A}$是和A距离为零的点全体，即$\overline{A}=\{x: d(x,A)=0\}$。

注意：由公理$[M_4]$可知，和单元素集$\{p\}$距离为零的点只有p本身。即

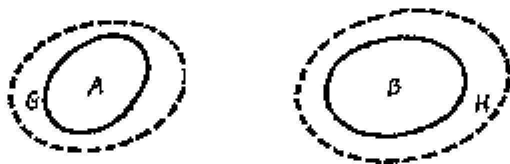
$$d(x,\{p\})=0 \Longrightarrow x=p。$$

因此，由上面的定理可知：在度量空间中单元素集$\{p\}$是一个闭集，因此有限集作为有限个单元素集之并也是闭集。这个结论可以叙述成：

推论 8.7 在度量空间X中，一切有限集是闭集。

于是我们看到度量空间具有某些拓扑性质，这些性质不是任何拓扑空间都可以有的。

下面的定理给出度量空间一个重要性质，称为“隔离”性质(separation property)：



定理 8.8 (隔离性公理)：设A与B为度量空间X中两个互斥的闭子集，则存在着互斥的开集G与H，使$A\subset G$与$B\subset H$

（如上图所示）。

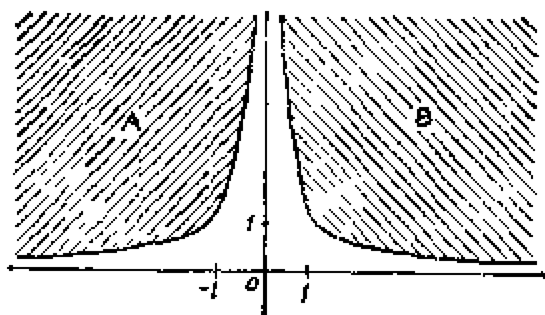
上面的定理也许会使人猜测两个互斥闭集的距离必大于零，但下面的例子说明这是不对的。

例 5.1 考察平面 $\mathbf{R}^2$ 上的两个集如下：

$$A=\{\langle x, y\rangle: xy\geqslant -1, x<0\}$$

$$B=\{\langle x, y\rangle: xy\geqslant 1, x>0\}$$

其图形如下图所示，

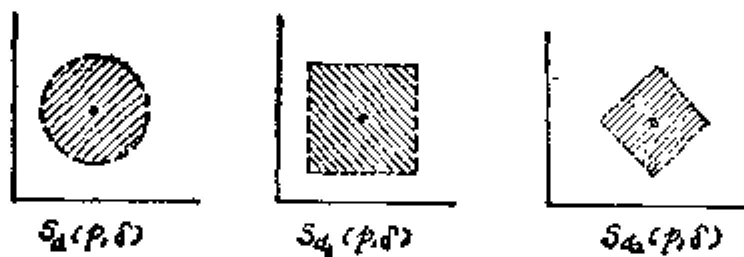


则 A 与 B 均为闭集，互斥，但 $d(A, B)=0$。

等价度量（Equivalent metrics）

设 d 与 d^* 为集 X 上的两个度量。若它们在 X 上诱生的拓扑相同，即：若 X 上的 d-开球与 d^*-开球是 X 上同一个拓扑的基，则称此二度量等价。

例 6.1 $\mathbf{R}^2$ 上的通常度量 d 及例 1.5 中所定义的度量 d_1 与 d_2 都诱生 $\mathbf{R}^2$ 上的通常拓扑，这是因为每个这种度量的开球组（见下图）都是 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑的基。所以这三个度量等价。



例6.2 考察非空集X上由下式定义的度量d，

$$d(a,\ b)=\begin{cases}2 & 若\ a\neq b\\ 0 & 若\ a=b\end{cases}$$

则$S_d(p,\ 1)=\{p\}$，于是单元素集是开集，从而d诱出X上的离散拓扑，故d等价于X上的平凡度量。

出上面的定义可得下面的命题：

命题8.9 在X上的任何度量簇中，“d等价于d^*”是一种等价关系。

度量化问题（Metrization problem）

已给拓扑空间$(X,\ \tau)$。问：是否有X上的度量d存在，它能诱生拓扑τ？若这种度量存在，则称拓扑空间$(X,\ \tau)$为**可度量化的**（metrizable）。

例7.1 任何离散拓扑空间$(X,\ \mathscr{D})$是可度量化的，因为X上的平凡度量诱生离散拓扑$\mathscr{D}$。

例7.2 考察实直线$\mathbf{R}$上的通常拓扑$\mathscr{U}$，则拓扑空间$(\mathbf{R},\ \mathscr{U})$是可度量化的，因为$\mathbf{R}$上的通常度量诱生$\mathbf{R}$上的通常拓扑。同样，平面$\mathbf{R}^2$赋予通常拓扑时，也是可度量化的。

例7.3 设X含有的点多于一个，则不可分拓扑空间$(X,\ \mathscr{I})$是不能度量化的，因为在不可分拓扑空间$(X,\ \mathscr{I})$中，只有X与$\varnothing$是闭集，而推论8.7告诉我们，在任何度量空间中，有限集都是闭集。因此，在X上由一个度量诱生的拓扑不可能只有X与$\varnothing$是闭集。这就证明了$(X,\ \mathscr{I})$是不可度量化的。

拓扑的**度量化问题**（metrization problem）是在于找出拓扑空间可以度量化的充要条件。Urysohn在1924年给出了

一个重要的部份的解答，称为 Urysohn 引理。但这问题一直到 1950 年才由几个数学家独立地给出完满的解决。关于 Urysohn 引理，我们以后将加以证明。但度量化问题的完整解决则超出了本书的范围，读者可参考 Kelley 的经典著作：General Topology。

等距的度量空间（Isometric metric spacse）

设已知两个度量空间(X, d)和(Y, e)。若有 1—1 与到上函数 f：$X\to Y$ 存在，使两点间的距离得以保持，即对任何 $p, q\in X$，有

$$d(p, q)=e(f(p), f(q))$$

则称(X, d)**等距**（isometric）于(Y, e)。注意：对于任何度量空间簇来说，"(X, d) 等距于 (Y, e)" 是等价关系。另外，易知：

定理 8.10 若度量空间(X, d)等距于(Y, e)，则 (X, d) 也同胚于(Y, e)。

下面的例子说明上述定理之逆是不正确的，即两个度量空间可以同胚而不等距。

例 8.1 设 d 是集 X 上的平凡度量，e 是集 Y 上由下面的公式定义的度量：

$$e(a, b)=\begin{cases}2 & 若\ a\neq b\\ 0 & 若\ a=b,\end{cases}$$

又设 X 与 Y 有相同的大于 1 的势，则 (X, d) 与 (Y, e) 不等距，因为不同空间中两点间的距离不同。但 d 与 e 诱生的都是离散拓扑，而等势的离散拓扑空间是同胚的，因此 (X, d) 同胚于(Y, e)。

m维欧氏空间 (Euclidean m-space)

所谓 **R**^{m} 是指 m 个实数集 **R** 的积集，即它是由一切 m 重实数组 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_m\rangle$ 所构成。考察由下面公式所定义的函数 d

$$d(p, q) = \sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_m-b_m)^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|a_i-b_i|^2}$$

其中 $p=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle$ 与 $q=\langle b_1, \cdots, b_m\rangle$，则 d 是 **R**^{m} 上的一个度量，这个度量称为 **R**^{m} 上的**欧氏度量**(Euclidean metric)。除非另有说明，我们以后对 **R**^{m} 都用这个度量。赋予欧氏度量的度量空间**R**^{m}，称为"m 维欧氏空间"(Euclidean m-space)，并用 E^m 来表示。

定理 8.11 m 维欧氏空间是一个度量空间。

注意：1 维欧氏空间就是具备通常度量的实直线 **R**；2 维欧氏空间是具备通常度量的平面 **R**^{2}。

Hilbert 空间

一切能使

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty$$

成立的、亦即使级数 $a_1^2+a_2^2+\cdots$ 收敛的无限实序列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 所构成的集记为 **R**$^\infty$。

例 9.1 考察无限序列

$$p=\langle 1,\ 1,\ 1,\ \cdots\rangle \text{ 与 } q=\langle 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots\rangle。$$

因 $1^2+1^2+\cdots$ 不收敛，故 $p\notin \mathbf{R}^\infty$；而 $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots$ 收敛，故 $q\in\mathbf{R}^\infty$。

现在，设 $p=\langle a_n\rangle$ 与 $q=\langle b_n\rangle$ 均属于 $\mathbf{R}^\infty$，则由

$$d(p,\ q)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n|^2}$$

定义的函数是 $\mathbf{R}^\infty$ 上的一个度量。这个度量称为 $\mathbf{R}^\infty$ 上的 **l_2-度量**（l_2-metric）。对于 $\mathbf{R}^\infty$，在没有特别声明时，我们都采用这个度量。$\mathbf{R}^\infty$ 具备 l_2-度量而成的度量空间称为 **Hilbert 空间**，或 **l_2-空间**，并以 $\mathbf{H}$ 来表示它。我们把这写成定理如下：

定理 8.12 Hilbert 空间（或 l_2-空间）是一个度量空间。

例 9.2 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中一切形如

$$\langle a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{m-1},\ a_m,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\rangle$$

（即从第 $m+1$ 项开始的各项均为零）的元素所构成子空间记为 $\mathbf{H}_m$。

注意：通过下面的自然对应：

$$\langle a_1,\ \cdots,\ a_m\rangle\longleftrightarrow\langle a_1,\ \cdots,\ a_m,\ 0,\ 0,\ \cdots\rangle$$

可知 $\mathbf{H}_m$ 与 m 维欧氏空间等距，因此也是同胚的。

下面两个例子说明 Hilbert 空间有些现象是 m 维欧氏空间所没有的。

例 9.3 考察 Hilbert 空间中的一个点列 $\langle p_n\rangle$，其中

$$p_k=\langle a_{1k},\ a_{2k},\ \cdots\rangle$$

的各项由 $a_{ik}=\delta_{ik}$ 定义；即：当 $i=k$ 时 $a_{ik}=1$，当 $i\neq k$ 时 $a_{ik}=0$。则如下面所示，点列 $\langle p_n\rangle$ 在每个轴上的投影 $\langle \pi_i(p_n)\rangle$ 都收敛于零：

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \langle 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\rangle \\
p_2 &= \langle 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots\rangle \\
p_3 &= \langle 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\rangle \\
p_4 &= \langle 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \cdots\rangle \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
&\quad\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\
\mathbf{0} &= \langle 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\rangle
\end{aligned}
$$

但是点列 $\langle p_n\rangle$ 并不收敛于 $\mathbf{0}$，这是因为对任何 $k\in\mathbf{N}$ 有

$$d(p_k,\ \mathbf{0})=1$$

成立。实际上，$\langle p_n\rangle$也不含任何收敛的子列。

例 9.4 令 $\mathbf{H}^*$ 表示 $\mathbf{H}$ 中第一个坐标为零的那种点所构成的真子集，则由

$$f(\langle a_1,\ a_2,\ \cdots\rangle)=\langle 0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\rangle$$

所定义的函数 f: $\mathbf{H}\to\mathbf{H}^*$ 是 1—1 与到上，并保持两点间的距离。所以 Hilbert 空间等距于它的一个真子空间。

度量空间中的收敛性及连续性（Convergence and continuity in metric spaces）

在度量空间中，收敛性与连续性通常定义如下，注意它们和通常的 ε—δ 定义的类似之处。

定义 度量空间 $(X,\ d)$ 中的点列 $\langle a_1,\ a_2,\ \cdots\rangle$ 称为收敛于 $b\in X$，是指：

任给 $\varepsilon>0$，有正整数 n_0 存在，使当 $n>n_0$ 时，就有 $d(a_n,\ b)<\varepsilon$。

定义 设已给度量空间(X, d)与(Y, d^*)，则一个由X到Y的函数f称为在$p\in X$连续，是指：

任给$\varepsilon>0$，有$\delta>0$存在，使当$d(p, x)<\delta$时，就有$d^*(f(p), f(x))<\varepsilon$。

注意：这里所给的定义和对于一般拓扑空间所给的收敛与连续的定义是等价的。

赋范空间（Normed spaces）

设$\mathbf{V}$为实线性向量空间，也就是集$\mathbf{V}$在向量加法运算及向量与实数的数乘运算下满足第二章所说的公理$[\mathbf{V}_1]$，$[\mathbf{V}_2]$，$[\mathbf{V}_3]$，则一个在每个向量$v\in\mathbf{V}$上赋予实数值$\|v\|$的函数$f(v)=\|v\|$对于任何$v, w\in\mathbf{V}$及$k\in\mathbf{R}$若满足下列三条公理：

$[N_1]$ $\|v\|\geqslant 0$，且$\|v\|=0$ iff $v=0$。

$[N_2]$ $\|v+w\|\leqslant\|v\|+\|w\|$。

$[N_3]$ $\|kv\|=|k|\|v\|$。

则称$\|v\|$为**V上的一个范数**(a norm on V)。

一个线性空间V和所赋予的范数一起，就称为**一个赋范线性向量空间**（a normed linear vector space）或简称为一个**赋范空间**（a normed space），实数$\|v\|$称为向量v的**范数**(norm)。

定理 8.13 设$\mathbf{V}$为赋范空间，则由下面公式定义的函数d：

$$d(v, w)=\|v-w\|，\text{其中 } v, w\in\mathbf{V}$$

是一个度量，称为**V上的诱生度量**（induced metric on V）。

由此可知，每个赋范空间赋以诱生度量就成为一个度量

空间，从而也是一个拓扑空间。

例 10.1 积集 $\mathbf{R}^m$ 在下面所定义的加法：

$$\langle a_1, \cdots, a_m\rangle + \langle b_1, \cdots, b_m\rangle = \langle a_1+b_1, \cdots, a_m+b_m\rangle$$

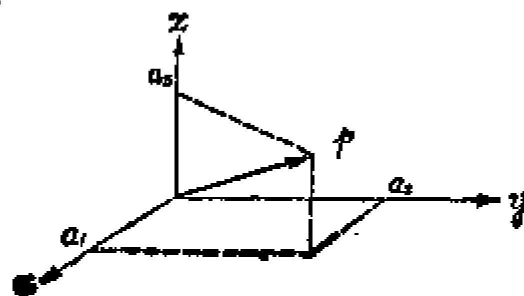
与数乘法：

$$k\langle a_1, \cdots, a_m\rangle = \langle ka_1, \cdots, ka_m\rangle$$

下成为一个线性向量空间。由下式定义的 $\mathbf{R}^m$ 上的函数

$$\|\langle a_1, \cdots, a_m\rangle\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_m^2} = \sqrt{\sum a_i^2} = \sqrt{\sum |a_i|^2}$$

是一个范数，称为 $\mathbf{R}^m$ 上的**欧氏范数**(Euclidean norm)。注意：$\mathbf{R}^m$ 上的欧氏范数诱生 $\mathbf{R}^m$ 上的欧氏度量，若 $p=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一点，则相应的 $\|p\|$ 就是由原点到 p 点的向量长，如右图所示。



例 10.2 下面的两个函数都是线性空间 $\mathbf{R}^m$ 上的范数：

$$\|\langle a_1, \cdots, a_m\rangle\| = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|)$$

$$\|\langle a_1, \cdots, a_m\rangle\| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|。$$

设 $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 是非空集 X 上所有的实函数构成的函数簇。我们知道（见定理 2.9）：在下面所定义的向量加法与数乘法

$$(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x)$$

$$(k+f)(x) \equiv kf(x)$$

下：$\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 是一个线性空间。

我们常常需要研究具备某些其他性质的函数簇，例如有界函数簇，连续函数簇，等等。为此，常会用到下述的线性代数的结果：

命题 8.14 设 $\mathscr{A}(X, \mathbf{R})$ 是 $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ 的某个非空子簇，并

设它满足以下两个性质：

（i）若 $f, g\in\mathscr{A}(X, \mathbf{R})$，则 $f+g\in\mathscr{A}(X, \mathbf{R})$。

（ii）若 $f\in\mathscr{A}(X, \mathbf{R})$ 与 $k\in\mathbf{R}$，则 $kf\in\mathscr{A}(X, \mathbf{R})$。

则 $\mathscr{A}(X, \mathbf{R})$本身也是一个线性向量空间。

例 10.3 区间 $[0, 1]$ 上一切连续的实函数构成的集合 $\mathscr{C}[0, 1]$ 构成一个线性空间，因为连续函数之和仍连续，连续函数乘以常数仍连续。由下面公式

$$\|f\|=\int_0^1|f(x)|dx$$

定义的$\mathscr{C}[0, 1]$上的函数是一个范数，它在$\mathscr{C}[0, 1]$上诱生的度量在例 1.3 中已定义过。

例 10.4 在线性空间$\mathscr{C}[0, 1]$上由下面公式

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|: x\in[0, 1]\}$$

定义的函数也是一个范数，它诱生的度量在例 1.4 中已定义过。

例 10.5 设 $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$ 表示 $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$中所有有界函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 构成的子组。则 $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$是一个线性空间，因为有界函数之和，有界函数乘以一个常数都仍然是有界函数。在 $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$上由下面公式

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|: x\in X\}$$

定义的函数是一个范数。

例 10.6 我们将来会证明：使 $\Sigma|a_n|^2<\infty$ 的一切实数列 $\langle a_n\rangle$ 所构成的集合 $\mathbf{R}^\infty$ 是一个线性空间，在 $\mathbf{R}^\infty$ 上由下面公式

$$\|\langle a_n\rangle\|=\sqrt{\Sigma|a_n|^2}$$

定义的函数是一个范数，称为 $\mathbf{R}^\infty$ 上的 l_2—范数。注意：这个范数诱生 Hilbert 空间的 l_2—度量。

习 题 解 答

度量

1. 求证：在度量定义中的公理$[M_3]$可以用下面的较弱的公理$[M_3^*]$来代替：

$[M_3^*]$ 若$a, b, c \in X$且各不相同，则

$$d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)。$$

解：设$a=b$，则

$$d(a, c) = d(b, c) = d(b, b) + d(b, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$$

当$b=c$时，论证相似。

最后设$a=c$，则

$$d(a, c) = 0 \leqslant d(a, b) + d(b, c)。$$

这说明，当a, b, c不是全部不相同时，三角不等式是可以由公理$[M_1]$推导而得的。

2. 求证：集X上的平凡度量是一种度量。即：由下面公式

$$d(a, b) = \begin{cases} 1 & 若 a \neq b \\ 0 & 若 a = b \end{cases}$$

定义的函数满足公理$[M_1]$，$[M_2]$，$[M_3^*]$及$[M_4]$。

解：(1) 令$a, b \in X$，则$d(a, b)=1$或$d(a, b)=0$，在每种情况下都有$d(a, b) \geqslant 0$。又当$a=b$时，则按d的定义有$d(a, b)=0$。因此d满足$[M_1]$。

(2) 设$a, b \in X$，若$a \neq b$则$b \neq a$，因此$d(a, b)=1$，$d(b, a)=1$从而$d(a, b)=d(b, a)$。另一方面，若$a=b$，则

$b=a$, 从而 $d(a, b)=0=d(b, a)$。因此 d 满足$[M_2]$。

(3) 设 a, b, c 是 X 中各不相同的点，则 $d(a, c)=1$，$d(a, b)=1$，$d(b, c)=1$，因此

$$d(a, c)=1\leqslant 1+1=d(a, b)+d(b, c)$$

这说明 d 满足$[M_3^*]$。

(4) 最后设 $a, b\in X$，$a\neq b$，则 $d(a, b)=1$，因此 $d(a, b)\neq 0$。这说明 d 满足$[M_4]$。

3．设 d 是非空集 X 上的度量，求证由下面公式

$$e(a, b)=\min(1, d(a, b)),\text{ 其中 } a, b\in X,$$

定义的函数 e 也是 X 上的一个度量。

解：(1) 设 $a, b\in X$，因 d 是度量，故 $d(a, b)$ 非负，$e(a, b)$ 或是 1 或是 $d(a, b)$，因此也是非负。另外，若 $a=b$，则

$$e(a, b)=\min(1, d(a, b))=\min(1, 0)=0$$

因此 e 满足$[M_1]$。

(2) 设 $a, b\in X$。根据定义 $e(a, b)=d(a, b)$ 或 $e(a, b)=1$。先假设 $e(a, b)=d(a, b)$，则 $d(a, b)<1$，因 d 是度量，故 $d(b, a)=d(a, b)<1$，
从而

$$e(b, a)=d(b, a)=d(a, b)=e(a, b)。$$

再假设 $e(a, b)=1$，则 $d(a, b)\geqslant 1$，从而

$$d(b, a)=d(a, b)\geqslant 1,$$

从而

$$e(b, a)=1=e(a, b)。$$

在两种情况下，e 都满足$[M_2]$。

(3) 设 $a, b, c\in X$，我们要证明三角不等式成立：

$$e(a, c)\leqslant e(a, b)+e(b, c)。$$

注意：$e(a, c)=\min(1, d(a, c))\leqslant 1$，因此若 $e(a, b)=1$ 或 $e(b, c)=1$，则三角不等式便成立。但若 $e(a, b)<1$ 与 $e(b, c)<1$ 同时成立时，则有

$$e(a, b)=d(a, b) \text{ 及 } e(b, c)=d(b, c)。$$

因此

$$\begin{aligned} e(a, c)&=\min(1, d(a, c))\leqslant d(a, c)\leqslant d(a, b)+d(b, c)\\ &=e(a, b)+e(b, c)。\end{aligned}$$

于是在所有情况下三角不等式都成立，因此 e 满足 $[M_3]$。

(4) 最后设 $a, b\in X$ 且 $a\neq b$，则 $d(a, b)\neq 0$，因此

$$e(a, b)=\min(1, d(a, b))\neq 0,$$

这说明 e 满足 $[M_4]$。

4. 设 d 为非空集 X 上的一个度量，求证：由下面公式

$$e(a, b)=\frac{d(a, b)}{1+d(a, b)}，\text{ 其中 } a, b\in X$$

定义的函数 e 也是 X 上的一个度量。

解：因为 d 是一个度量，所以 e 显然满足 $[M_1]$，$[M_2]$ 及 $[M_4]$，故只须证明 e 满足 $[M_3]$，即满足三角不等式。

为此，设 $a, b, c\in X$，则

$$\frac{d(a, d)}{1+d(a, d)+d(b, c)}\leqslant\frac{d(a, b)}{1+d(a, b)}=e(a, b)$$

及 $$\frac{d(b, c)}{1+d(a, b)+d(b, c)}\leqslant\frac{d(b, c)}{1+d(b, c)}=e(b, c)。$$

因 d 是一个度量，故 $d(a, c)\leqslant d(a, b)+d(b, c)$，因此

$$e(a, c)=\frac{d(a, c)}{1+d(a, c)}\leqslant\frac{d(a, b)+d(b, c)}{1+d(a, b)+d(b, c)}$$

$$=\frac{d(a, b)}{1+d(a, b)+d(b, c)}$$

$$+\frac{d(b, c)}{1+d(a, b)+d(b, c)}$$

$$\leqslant e(a, b)+e(b, c)$$

于是 e 是一个度量。

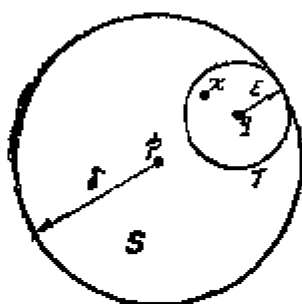
开球

5．求证引理 8.2：设 S 为以 p 为中心、以 δ 为半径的开球，即：$S=S(p, \delta)$，则对于每点 $q\in S$，有一以 q 为中心的开球 T 存在，使 T 包含在 S 之内。

解：因 $q\in S=S(p, \delta)$，故

$$d(p, q)<\delta,$$

因此 $\quad \varepsilon=\delta-d(p, q)>0$。



易证：以 q 为中心、以 ε 为半径的开球 $T=S(q, \varepsilon)$ 是 S 的一个子集。

为此，设 $x\in T=S(q, \varepsilon)$，则 $d(x, q)<\varepsilon=\delta-d(q, p)$，因此由三角不等式得

$$d(x, p)\leqslant d(x, q)+d(q, p)<[\delta-d(q, p)]+d(q, p)=\delta。$$

因 x 与 p 的距离 $<\delta$，故 $x\in S=S(p, \delta)$，所以 $x\in T$ 意指 $x\in S$。这说明 T 是 S 的子集（见上图）。

6．设 δ_1 与 δ_2 为实数，满足 $0<\delta_1\leqslant\delta_2$，$S(p, \delta_1)$ 与 $S(p, \delta_2)$ 都是开球，求证：

$$S(p, \delta_1)\subset S(p, \delta_2)。$$

解：设 $x\in S(p,\delta_1)$，则 $d(x,p)<\delta_1\leqslant\delta_2$，因此

$$x\in S(p,\delta_2),$$

于是 $S(p,\delta_1)\subset S(p,\delta_2)$。

7．求证：若 S 与 T 为两个同心开球，则其中一个必为另一个的子集。

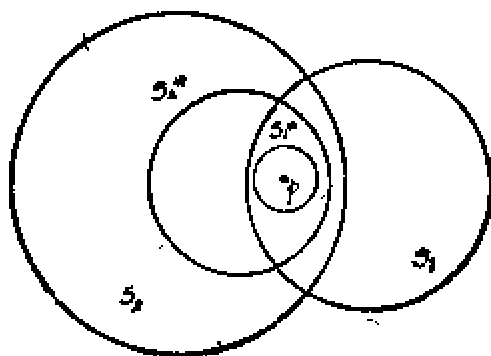
解：设 $S=S(p,\delta_1)$ 和 $T=S(p,\delta_2)$，即 S 和 T 具有同一中心 p，分别有半径 δ_1 和 δ_2。不是 $\delta_1\leqslant\delta_2$ 就是 $\delta_2\leqslant\delta_1$，因此由上题，不是 $S\subset T$ 就是 $T\subset S$。

8．求证引理 8.3：设 S_1 与 S_2 为开球，又设 $p\in S_1\cap S_2$，则有以 p 为中心的一个开球 S_p 存在，使 $p\in S_p\subset S_1\cap S_2$。

解：因 $p\in S_1$，S_1 是一个开球，故由引理 8.2，有以 p 为中心的一个开球 S_1^* 存在，使 $p\in S_1^*\subset S_1$。同理有以 p 为中心的一个开球 S_2^* 存在使 $p\in S_2^*\subset S_2$。现在 S_1^* 与 S_2^* 都以 p 为中心，所以由习题 7 知 S_1^* 与 S_2^* 中必有一个譬如说 S_1^* 含在另一个之中，于是我们有

$$p\in S_1^*\subset S_1 \quad 和 \quad p\in S_1^*\subset S_2^*\subset S_2$$

从而 $p\in S_1^*\subset S_1\cap S_2$，因此我们可以取 $S_p=S_1^*$（见下图）。



度量拓扑

9．求证：设 X 为度量空间；又设 $\mathscr{D}_p$ 表示以 $p\in X$ 为中

心的一切开球所成的组，则 $\mathscr{D}_p$ 是 p 点处的一个局部基。

解：设 G 为 X 中含 p 的一个开子集。因 X 中的一切开球关于度量拓扑构成一个基，故有开球 S 使 $p\in S\subset G$。但由引理 8.2，有以 p 为中心的开球 $S_p\in\mathscr{D}_p$ 使 $p\in S_p\subset S\subset G$，因此 $\mathscr{D}_p$ 是 p 处的一个局部基。

10．求证定理 8.5：设 X 为一度量空间，则下列的以 $p\in X$ 为中心的可数开球组

$$\mathscr{X}=\{S(p,1),S(p,\frac{1}{2}),S(p,\frac{1}{3}),\cdots\}$$

构成 p 点处的一个局部基。

解：设 G 为 X 中含 p 点的一个开子集，则由上一习题，有以 p 为中心的开球 $S(p,\delta)$ 存在，使 $p\in S(p,\delta)\subset G$。因 $\delta>0$，故有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使 $1/n_0<\delta$，因此

$$p\in S\left(p,\ \frac{1}{n_0}\right)\subset S(p,\delta)\subset G$$

其中 $S\left(p,\ \frac{1}{n_0}\right)\in\mathscr{X}$。因此 $\mathscr{X}$ 是 p 处的一个局部基。

11．求证定理 8.6：度量空间 X 中一集 A 的闭包 $\overline{A}$ 是与 A 距离为零的点全体所成的集，即：$\overline{A}=\{x: d(x,A)=0\}$。

解：设 $d(p,A)=0$，则任何以 p 为中心的开球因而任何含 p 的开集 G 至少也含 A 的一个点。因此 p 或属于 A，或是 A 的一个极限点，所以 $p\in\overline{A}$。

另一方面，设 $d(p,A)=\varepsilon>0$，则以 p 为中心的开球 $S\left(p,\ \frac{1}{2}\varepsilon\right)$ 不含 A 的点，亦即 $p\in\mathrm{ext}(A)$，从而 $p\notin\overline{A}$。合起来，就有 $\overline{A}=\{x;\ d(x,A)=0\}$。

12．求证：度量空间X的子集F是闭集，当且仅当

$$\{x;\ d(x, F)=0\}\subset F。$$

解：直接从第11题以及："一个集F是闭集，当且仅当$F=\overline{F}$"便可得证。

13．设F为度量空间X的闭集，点$p\in X$而不属于F，即$p\notin F$，则$d(p, F)\neq 0$。

解：若$d(p, F)=0$和F是闭集，则由习题12，$p\in F$。但由假设$p\notin F$，所以$d(p, F)\neq 0$。

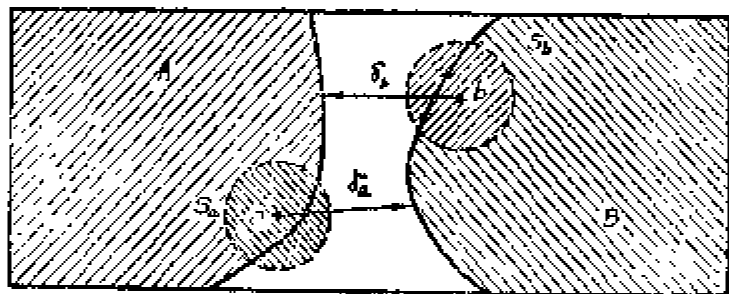
14．求证定理8.8：设A, B为度量空间X中互斥的闭集，则有互斥的开集G与H存在，使$A\subset G$，$B\subset H$。

解：若A, B中有一个是空集，譬如说$A=\varnothing$，则$\varnothing$与X为互斥的开集，使$A\subset\varnothing$，$B\subset X$。故可设A, B都是非空集。设$a\in A$，因A, B互斥，故$a\notin B$，但因B是闭集，故由上一习题知$d(a, B)=\delta_a>0$。类似地若$b\in B$，则

$$d(b, A)=\delta_b>0。$$

令
$$S_a=S\left(a, \frac{1}{3}\delta_a\right),\quad S_b=S\left(b, \frac{1}{3}\delta_b\right)$$

则$a\in S_a$，$b\in S_b$（见附图）。



可以证明这两个集

$$G=\bigcup\{S_a;\ a\in A\}\quad 及\quad H=\bigcup\{S_b;\ b\in B\}$$

满足定理所要求的条件。现在G与H都是开集，因为它们都是开球的并。此外，$a\in S_a$意指$A\subset G$，$b\in S_b$意指$B\subset H$，只需证明$G\cap H=\varnothing$。

用反证法。假设$G\cap H\neq\varnothing$，譬如说$p\in G\cap H$，则：

$$\exists a_0\in A,\ b_0\in B \text{ 使得 } p\in S_{a_0},\ p\in S_{b_0}$$

又设$d(a_0, b_0)=\varepsilon>0$，则

$$d(a_0, B)=\delta_{a_0}\leqslant\varepsilon,\ d(b_0, A)=\delta_{b_0}\leqslant\varepsilon。$$

但$p\in S_{a_0}$，$p\in S_{b_0}$，故

$$d(a_0, p)<\frac{1}{3}\delta_{a_0},\ d(p, b_0)<\frac{1}{3}\delta_{b_0}$$

因此由三角不等式得

$$d(a_0, b_0)=\varepsilon\leqslant d(a_0, p)+d(p, b_0)<\frac{1}{3}\delta_{a_0}+\frac{1}{3}\delta_{b_0}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\frac{2}{3}\varepsilon。$$

但这是不可能的。因此G和H是互斥的，定理成立。

等价度量

15．设d与e是集X上的度量，使得对于每个以$p\in X$为中心的d-开球S_d来说，有以p为中心的e-开球S_e存在，使$S_e\subset S_d$。求证：由d所诱生的拓扑τ_d比由e所诱生的拓扑τ_e粗，即$\tau_d\subset\tau_e$。

解：设$G\in\tau_d$，我们要证G也是一个e-开集。设$p\in G$。因为G是d-开集，故存在一个以p为中心的d-开球S_d，使$p\in S_d\subset G$。由假设，存在一个以p为中心的e-开球$S_e(p)$，使$p\in S_e(p)\subset S_d\subset G$。从而

$$G=\bigcup\{S_e(p):\ p\in G\}。$$

于是G是e-开球的并，所以它也是e-开集。因此$\tau_d \subset \tau_e$。

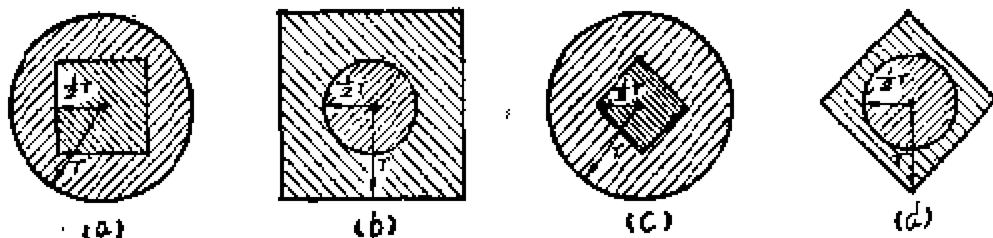
16. 设d与e均为集X上的度量，使得对于每个以$p\in X$为中心的d-开球S_d来说，有以$p\in X$为中心的e-开球S_e存在，使$S_e \subset S_d$，反之对于每个以$p\in X$为中心的e-开球S_e^*，有d-开球S_d^*存在，使$S_d^* \subset S_e^*$。求证：d与e为等价度量，即：它们诱生出X上同一个拓扑。

解：由习题15，由d诱生的拓扑τ_d粗于由e诱生的拓扑τ_e，即$\tau_d \subset \tau_e$。由习题15同样有$\tau_e \subset \tau_d$。因此$\tau_d = \tau_e$。

17. 求证：平面$\mathbf{R}^2$上的通常度量d等价于例题1.5中所定义的$\mathbf{R}^2$上的度量d_1及d_2。

解：注意：任意一个圆盘内可以画一个正方形，如下图(a)所示；一个正方形内可以画一个圆盘，如下图(b)所示。现在在一个圆盘内所有的点构成一个d-开球，而在一个正方形内所有的点构成一个d_1开球，所以由习题16，度量d和d_1是等价的。

另外，我们可以在一个圆盘内画一个菱形，如下图(c)所示，在一个菱形内可以画一个圆盘，如下图(d)所示。因为在菱形内所有的点构成一个d_2-开球，故由习题16，d和d_2是等价的。



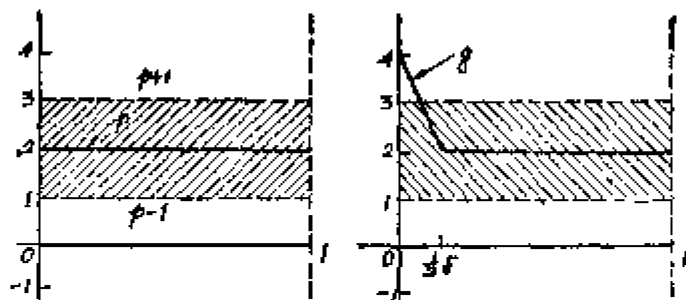
18. 设$\mathscr{C}[0, 1]$表示定义在$I=[0, 1]$上的实连续函数全体，考察$\mathscr{C}[0, 1]$上由下面两个公式定义的度量d与e：

$$d(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)|: x\in I\}$$

$$e(f, g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

（见例 1.3 与例 1.4），求证：由 d 诱生的拓扑 τ_d 不粗于由 e 诱生的拓扑 τ_e，即 $\tau_d \not\subset \tau_e$。

解：设 p 是常值函数 $p(x)=2$，令 $\varepsilon=1$，则球 $S_d(p, \varepsilon)$ 由所有这种连续函数 g 组成，其值界于 $p-1$ 与 $p+1$ 之间，即对一切 $x\in I g$ 满足 $1<g(x)<3$（见附图）。



只要证明 $S_d(p, \varepsilon)$ 不包含任何以 p 为中心的 e-开球就足够了，即：只要证：对于任何 $\delta>0$，有 $S_e(p, \delta)\not\subset S_d(p, \varepsilon)$。为此考察由 $\langle 0, 4\rangle$ 到 $\langle \frac{1}{2}\delta, 2\rangle$ 的线段及由 $\langle \frac{1}{2}\delta, 2\rangle$ 到 $\langle 1, 2\rangle$ 的线段合成的折线所表示的函数 g，即由下面式子

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{-4x}{\delta}+4 & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ 2 & \text{当 } \dfrac{1}{2}\delta\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

定义的函数 $g(x)$（见上图）。

注意 p 与 q 之间的面积为 $\frac{1}{2}\delta$，即 $e(p, q)=\frac{1}{2}\delta$，则 $q\in S_e(p, \delta)$。但是 $d(p, q)=2$，故 $q\notin S_d(p, \varepsilon)$。这说明对于任意的 $\delta>0$ 来说，都有 $S_e(p, \delta)\not\subset S_d(p, \varepsilon)$，所以 $\tau_d\not\subset\tau_e$。

19. 设$\mathscr{C}[a, b]$表示闭区间 $X=[a, b]$ 上的连续函数全体。考察 $\mathscr{C}[a, b]$ 上由下面两个公式所定义的度量 d 与 e：

$$d(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)|: x\in X\}$$

$$e(f, g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\, dx,$$

求证：由 e 诱生的拓扑 τ_e 比由 d 诱生的拓扑 τ_d 为粗，即 $\tau_e\subset\tau_d$。

解：设 $S_e(p, \varepsilon)$为$\mathscr{C}[a, b]$ 中任一以 $p\in\mathscr{C}[a, b]$ 为中心的 e-开球，令 $\delta=\frac{\varepsilon}{b-a}$，由习题 15，证明下述这点是足够了：$S_d(p, \delta)$（以 p 为心，δ 为半径的 d-开球）是 $S_e(p, \varepsilon)$ 的子集，即 $S_d(p, \delta)\subset S_e(p, \varepsilon)$。

为此，设 $f\in S_d(p, \delta)$，则

$$\sup\{|p(x)-f(x)|\}<\delta=\frac{\varepsilon}{b-a}, \text{因此，}$$

$$\begin{aligned} e(p, f)&=\int_a^b |p(x)-f(x)|\, dx \\ &\leqslant\int_a^b \sup\{|p(x)-f(x)|\}dx \\ &<\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx=\varepsilon, \end{aligned}$$

故 $f\in S_e(p, \varepsilon)$，所以 $S_d(p, \delta)\subset S_e(p, \varepsilon)$。

赋范空间

20. 求证定理 8.13：在赋范空间 $\mathbf{V}$ 上由下面公式

$$d(v, w)=\|v-w\|,$$

其中 v, w 均为 $\mathbf{V}$ 中的向量，所定义的函数 d 是 $\mathbf{V}$ 上的一个度量。

解：(1) 注意由[N_1]得

$$d(v, w)=\|v-w\|\geqslant 0$$

$$d(v, v)=\|v-v\|=\|0\|=0$$

所以 d 满足[M_1]。

(2) 由[N_3]得

$$d(v, w)=\|v-w\|=\|(-1)(w-v)\|=|-1|\cdot\|w-v\|$$
$$=\|w-v\|=d(w, v)$$

所以 d 满足[M_2]。

(3) 由[N_2]，

$$\|v+w\|\leqslant\|v\|+\|w\|$$

对一切 $v, w\in\mathbf{V}$ 成立，从而，当 $a, b, c\in\mathbf{V}$ 时，以

$$v=a-b,\ w=b-c$$

代入，得

$$\|a-c\|=\|(a-b)+(b-c)\|=\|v+w\|$$
$$\leqslant\|v\|+\|w\|=\|a-b\|+\|b-c\|$$

就是说，$d(a, c)\leqslant d(a, b)+d(b, c)$，因此 d 满足[M_3]。

(4) 最后若 $v\neq w$，则 $v-w\neq 0$，从而由[N_1]得

$$d(v, w)=\|v-w\|>0$$

就是说，d 满足[M_4]。

21. 求证 Cauchy-Schuarz 不等式：对于 $\mathbf{R}^m$ 中任何两点 $p=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle$ 及 $q=\langle b_1, \cdots, b_m\rangle$，有

$$\sum_{i=1}^{m}|a_ib_i|\leqslant\|p\|\cdot\|q\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|a_i|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|b_i|^2}$$

其中 $\|p\|$ 是欧氏范数。

解：若 $p=0$ 或 $q=0$，则不等式成为 $0\leqslant 0$，这是自然成立的。因此，只需考察 $p\neq 0$ 同时 $q\neq 0$ 的情况，即 $\|p\|\neq 0$ 同

时 $\|q\|\neq 0$ 的情况。

现在对于任何实数 $x, y\in \mathbf{R}$，有

$$0\leqslant (x-y)^2=x^2-2xy+y^2,$$

即

$$2xy\leqslant x^2+y^2 \tag{1}$$

因 x 和 y 是任意实数，故在（1）中可令 $x=\frac{|a_i|}{\|p\|}$，$y=\frac{|b_i|}{\|q\|}$

所以对任意 i，

$$2\frac{|a_i|\cdot|b_i|}{\|p\|\cdot\|q\|}\leqslant\frac{|a_i|^2}{\|p\|^2}+\frac{|b_i|^2}{\|q\|^2}。$$

但由欧氏范数的定义，$\Sigma|a_i|^2=\|p\|^2$ 及 $\Sigma|b_i|^2=\|q\|^2$，所以将(2)式对 i 求和，利用 $|a_ib_i|=|a_i||b_i|$，得

$$2\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_ib_i|}{\|p\|\cdot\|q\|}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_i|^2}{\|p\|^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}|b_i|^2}{\|q\|^2}=\frac{\|p\|^2}{\|p\|^2}+\frac{\|q\|^2}{\|q\|^2}=2$$

就是说

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_ib_i|}{\|p\|\|q\|}\leqslant 1$$

上式两边乘以 $\|p\|\cdot\|q\|$，就得到所要求的不等式。

22. 求证 Minkouski 不等式：对 $\mathbf{R}^m$ 中任何两点

$$p=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle \text{ 及 } q=\langle b_1, \cdots, b_m\rangle$$

有

$$\|p+q\|\leqslant\|p\|+\|q\|$$

即：

$$\sqrt{\Sigma|a_i+b_i|^2}\leqslant\sqrt{\Sigma|a_i|^2}+\sqrt{\Sigma|b_i|^2}。$$

解：若 $\|p+q\|=0$，则不等式自然成立。因此只需要考察 $\|p+q\|\neq 0$ 的情况。

首先注意，对任何实数 a_i 与 b_i 有

$$|a_i+b_i|\leqslant|a_i|+|b_i|,$$

因此 $\|p+q\|^2=\sum|a_i+b_i|^2=\sum|a_i+b_i|\cdot|a_i+b_i|$

$$\leqslant\sum|a_i+b_i|(|a_i|+|b_i|)$$

$$=\sum|a_i+b_i|\cdot|a_i|+\sum|a_i+b_i|\cdot|b_i|。$$

但由 Cauchy-Schuarz 不等式有

$$\sum|a_i+b_i|\cdot|a_i|\leqslant\|p+q\|\cdot\|p\|$$

及 $$\sum|a_i+b_i|\cdot|b_i|\leqslant\|p+q\|\cdot\|q\|,$$

于是得

$$\|p+q\|^2\leqslant\|p+q\|\cdot\|p\|+\|p+q\|\cdot\|q\|$$

$$=\|p+q\|(\|p\|+\|q\|)。$$

由于我们考察的是 $\|p+q\|\neq 0$ 的情况，所以可以用 $\|p+q\|$ 除上式两端，便得 Minkowski 不等式。

23．求证 Euclid 范数

$$\|p\|=\sqrt{\sum|a_i|^2}，其中 p=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle\in\mathbf{R}^m,$$

满足公理[N_1]，[N_2] 及 [N_3]。

解：[N_1]是从实数的性质推得，[N_2]就是 Minkowski 不等式，它已在上题得到证明。因此只须证明[N_3]成立。对任何向量 $p=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle$和任意实数 $k\in\mathbf{R}$，有

$$\|kp\|=\|k\langle a_1, \cdots, a_m\rangle\|=\|\langle ka_1, \cdots, ka_m\rangle\|$$

$$=\sqrt{\sum|ka_i|^2}=\sqrt{\sum|k|^2|a_i|^2}=\sqrt{|k|^2\sum|a_i|^2}$$

$$=\sqrt{|k|^2}\sqrt{\sum|a_i|^2}=|k|\sqrt{\sum|a_i|^2}=|k|\cdot\|p\|$$

因此[N_3]也成立。

24．求证定理 8.11：m 维欧氏空间是一个度量空间，即：$\mathbf{R}^m$ 上的欧氏度量满足公理[M_1]到[M_4]。

解：利用习题 23 及 $\mathbf{R}^m$ 上的欧氏度量是由 $\mathbf{R}^m$ 上的欧氏范数诱生的这个结论。

25．设$\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\rangle$是收敛实数列，具有性质：对一

切 $n\in\mathbf{N}$ $a_n\leqslant b$ 成立。求证：$\lim a_n\leqslant b$。

解：假设 $\lim a_n=a>b$ 并设 $\varepsilon=a-b>0$。因 $a_n\to a$，故存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得

$$a-a_{n_0}\leqslant|a-a_{n_0}|<\varepsilon=a-b,$$

于是 $-a_{n_0}<-b$，因此 $b<a_{n_0}$，但这与假设矛盾。

从而，$\lim a_n\leqslant b$。

26. 求证关于无限和的 Minkowski 不等式：若 $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle\in\mathbf{R}^\infty$，则

$$\|\langle a_n+b_n\rangle\|\leqslant\|\langle a_n\rangle\|+\|\langle b_n\rangle\|$$

即
$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^2}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2}\text{。}$$

解：由关于有限和的 Minkowski 不等式得：

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m}|a_n+b_n|^2}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{m}|b_n|^2}$$
$$\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2}\text{。}$$

因为对于任何 $m\in\mathbf{N}$，上式成立，所以由上题结果在极限情况下不等式仍成立。

27. 求证：$\mathbf{R}^\infty$ 上的 l_2-范数，即 $\|\langle a_n\rangle\|=\sqrt{\sum|a_n|^2}$ 满足公理[N_1]，[N_2] 及 [N_3]。

解：这和 23 题中欧氏范数满足公理[N_1]，[N_2] 和 [N_3] 的证明是类似的。

28. 求证定理 8.12：Hilbert 空间（或 l_2-空间）是一个度量空间。

解：利用 27 题及 $\mathbf{R}^\infty$ 上的 l_2 度量是由 l_2-范数诱生的这个结论。

29. 设实数 a 与 b 有下述性质：对任何 $\varepsilon>0$ 有 $a\leqslant b+\varepsilon$，求证：$a\leqslant b$。

解：假设 $a>b$，则 $a=b+\delta$，其中 $\delta>0$。设 $\varepsilon=\frac{1}{2}\delta$，现在 $a>b+\frac{1}{2}\delta=b+\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$。但这与假设矛盾，故 $a\leqslant b$。

30. 设 $I=[0,1]$，求证对 $\mathscr{C}[0,1]$上的函数 f

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|\}$$

是一个范数。

解：已知闭区间上的实连续函数是有界的，所以 $\|f\|$ 的定义是合理的。

(1) 因 $|f(x)|\geqslant 0$ 对任何 $x\in I$ 成立，故 $\|f\|\geqslant 0$，又

$$\|f\|=0 \text{ iff } f(x)=0$$

对每个 $x\in I$ 成立，即 iff $f=0$。这说明$[N_1]$得到满足。

(2) 令 $\varepsilon>0$，则存在 $x_0\in I$ 使

$$\begin{aligned}\|f+g\|&=\sup\{|f(x)+g(x)|\}\leqslant|f(x_0)+g(x_0)|+\varepsilon\\&\leqslant|f(x_0)|+|g(x_0)|+\varepsilon\\&\leqslant\sup\{|f(x)|\}+\sup\{|g(x)|\}+\varepsilon\\&=\|f\|+\|g\|+\varepsilon。\end{aligned}$$

因此由习题 29 得

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$$

这说明$[N_2]$得到满足。

(3) 现在设 $k\in\mathbf{R}$，则

$$\begin{aligned}\|kf\|&=\sup\{|(kf)(x)|\}=\sup\{|kf(x)|\}\\&=\sup\{|k||f(x)|\}=|k|\sup\{|f(x)|\}=|k|\|f\|\end{aligned}$$

这说明$[N_3]$得到满足。

补 充 习 题

度量

31. 设 $\mathscr{B}(X, Y)$ 是从任意集 X 到度量空间 (Y, d) 的所有有界函数的集组，求证函数 e 是 $\mathscr{B}(X, Y)$ 上的一个度量：

$$e(f, g)=\sup\{d(f(x), g(x)) : x\in X\}。$$

32. 设 $d_1, \cdots, d_m$ 分别是 $X_1, \cdots, X_m$ 上的度量，求证下列函数是积集 $X=\prod_i X_i$ 上的度量

$$d(p, q)=\max\{d_1(a_1, b_1), \cdots, d_m(a_m, b_m)\},$$

$$e(p, q)=d_1(a_1, b_1)+\cdots+d_m(a_m, b_m)$$

其中 $p=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle$, $q=\langle b_1, \cdots, b_m\rangle\in X=\prod_i X_i$。

33. 设 $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cup\{\infty, -\infty\}$ 是扩充了的实直线，又设

$$f: \mathbf{R}^*\to[-1, 1]$$

由 $f(x)=x/(1+|x|)$ 若 $x\in\mathbf{R}$, $f(\infty)=1$、$f(-\infty)=-1$ 所定义。求证下面的函数是 $\mathbf{R}^*$ 上的度量：

$$d(x, y)=|f(x)-f(y)|。$$

34. 设 $\mathbf{R}^+$ 表示非负实数，又设 $f: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 是一个连续函数，使

(i) $f(0)=0$,

(ii) $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$,

(iii) $x<y$ 导致 $f(x)<f(y)$,

求证若 d 是任一集合 X 上的一个度量，则复合函数 $f\circ d$ 也是 X 上的一个度量。

35. 设 ρ 是某集合 X 上的准度量，设 $\sim$ 是 X 内由

$$a \sim b \quad \text{iff} \quad \rho(a, b)=0$$

所定义的关系。

(i) 求证$\sim$是X内的一个等价关系。

(ii) 求证下面的函数是商集 $X/\sim=\{[a]: a\in X\}$上的一个度量：

$$d([a], [b])=\rho(a, b),$$

其中$[a]$表示 $a\in X$ 的等价类。

36. 设 $\mathscr{R}[0, 1]$ 表示 $[0, 1]$上(Riemann)可积函数的集组。求证下面函数是 $\mathscr{R}[0, 1]$上的准度量：

$$\rho(f, g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

并用反例证明 ρ 不是一个度量。

37. 求证函数 d 是集合X上的一个度量，当且仅当它满足下列两个条件：

(i) $d(a, b)=0$ 当且仅当 $a=b$,

(ii) $d(a, c)\leqslant d(a, b)+d(c, b)$。

集合之间的距离，直径

38. 试举一例说明实直线 $\mathbf{R}$ 上有两个闭子集A与B

$$d(A, B)=0 \quad 但 \quad A\cap B=\varnothing。$$

39. 设 d 是X上的一个度量。求证对任何子集

$$A, B\subset X:$$

(i) $d(A\cup B)\leqslant d(A)+d(B)+d(A, B)$

(ii) $d(\overline{A})=d(A)$。

40. 设 d 是X上的一个度量，又设A是X的任一子集，求证由 $f(x)=d(x, A)$所定义的函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 是连续的。

41．考虑由$d(\langle a, b\rangle)=|a-b|$（即$\mathbf{R}$中通常的度量）所定义的函数$d$：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$。求证：对于直线$\mathbf{R}$和平面$\mathbf{R}^2$上的通常拓扑$d$是连续的。

42．设A是度量空间X的任一子集，证明$d(A)=d(\overline{A})$

度量拓扑

43．设(A, d)是(X, d)的一个度量子空间，求证(A, d)也是(X, d)的一个拓扑子空间，即d在A上的收缩诱导出A上的相对拓扑。

44．求证：若拓扑空间(X, τ)同胚于一个度量空间(Y, d)，则(X, τ)是可度量化的。

45．求证定理8.10：若(X, d)与(Y, e)等距，则(X, d)也与(Y, e)同胚。

46．试给一例说明一个开球

$$S(p, \delta)=\{x: d(p, x)<\delta\}$$

的闭包不必是闭球

$$\overline{S}(p, \delta)=\{x: d(p, x)\leqslant\delta\}。$$

47．求证闭球$\overline{S}(p, \delta)=\{x: d(p, x)\leqslant\delta\}$是闭的。

48．求证：度量空间X中的序列$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$，收敛于点$p$，当且仅当实数列$\langle d(a_1, p), d(a_2, p), \cdots\rangle$收敛于$0\in\mathbf{R}$即

$$\lim a_n=p \quad \text{iff} \quad \lim d(a_n, p)=0。$$

49．求证：在度量空间X中若$\lim a_n=p$，$\lim b_n=q$，则实数列$\langle d(a_1, b_1), d(a_2, b_2), \cdots\rangle$收敛于$d(p, q)\in\mathbf{R}$，即

$$\lim d(a_n, b_n)=d(\lim a_n, \lim b_n)。$$

等价度量

50．设 d 是 X 上的一个度量，求证下述度量与 d 等价：

$$e(a, b)=\min\{1, d(a, b)\}。$$

51．设 d 是 X 上的一个度量，求证下述度量与 d 等价：

$$e(a, b)=\frac{d(a, b)}{1+d(a, b)}。$$

52．设 d 与 e 是 X 上的度量，假设 $\exists k, k'\in \mathbf{R}$ 使得对每对 $a, b\in X$ 有

$$d(a, b)\leqslant ke(a, b) \quad 与 \quad e(a, b)\leqslant k'd(a, b)$$

求证 d 与 e 是等价度量。

m 维欧氏空间，Hilbert 空间

53．设 $p_1=\langle a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m}\rangle$，$p_2=\langle a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m}\rangle$，…是 m 维欧氏空间的点，求证 $p_n\to q=\langle b_1, b_2, \cdots, b_m\rangle$，当且仅当对 $k=1, \cdots, m$，$\langle a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \cdots\rangle$ 收敛于 b_k，即在每一坐标空间中投影 $\langle \pi_k(p_n)\rangle$ 收敛于 $\pi_k(q)$。

54．求证如 G 是 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 的一个开子集，则

$$\exists p=\langle a_n\rangle\in G \text{ 使 } a_1\neq 0。$$

55．设 H^* 表示 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中由第一坐标为零的所有点组成的真子空间，(i) 求证 H^* 是闭的，(ii) 求证 H^* 在 $\mathbf{H}$ 中是无处稠密的，即 $\mathrm{int}(\bar{H}^*)=\emptyset$。

56．设 $p_1=\langle a_{11}, a_{12}, \cdots\rangle$，$p_2=\langle a_{21}, a_{22}, \cdots\rangle$ 是 $\mathbf{R}^\infty$ 的点，假设实数列 $\langle \pi_k(p_n)\rangle=\langle a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \cdots\rangle$ 对每一 $k\in \mathbf{N}$ 收敛于 $b_k\in \mathbf{R}$，

（i）求证 $q=\langle b_1, b_2, \cdots\rangle$ 属于 $\mathbf{R}^\infty$。

(ii) 求证序列$\langle p_1, p_2, \cdots\rangle$收敛于$q$。

Hilbert 立方体

57. 对每一$n\in\mathbf{N}$，使$0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n}$的所有实数序列$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$的集合$\mathbf{I}$称为 Hilbert 立方体(Hilbert cube)。

(i) 求证$\mathbf{I}$是$\mathbf{R}^\infty$的一个子集。

(ii) 求证$\mathbf{I}$是$\mathbf{R}^\infty$的一个闭的、有界的子集。

赋范空间

58. 设$\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$表示定义于某非空集$X$上的所有有界实函数$f: X\to\mathbf{R}$的集组。求证$\|f\|=\sup\{|f(x)|; x\in X\}$是$\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$上的范数。

59. 线性空间X上的两个范数$\|\cdots\|_1$与$\|\cdots\|_2$是等价的，当且仅当它们在X上诱生出等价的度量，即当且仅当它们在X上决定相同的拓扑。求证$\|\cdots\|_1$等价于$\|\cdots\|_2$当且仅当$\exists a_1, a_2, b_1, b_2\in\mathbf{R}$使对所有的$x\in X$,

$$a_1\|x\|_1<\|x\|_2<b_1\|x\|_1 \quad \text{且} \quad a_2\|x\|_2<\|x\|_1<b_2\|x\|_2。$$

60. 设$\|\cdots\|$是欧氏范数，又设d是在平面$\mathbf{R}^2$上诱生的欧氏度量。考虑下面所定义的函数e

$$e(p, q)=\begin{cases}\|p\|+\|q\| & \text{若}\ \|p\|\neq\|q\|\\ d(p, q) & \text{若}\ \|p\|=\|q\|\end{cases}$$

(i) 求证e是$\mathbf{R}^2$上的度量。

(ii) 试描述度量空间$(\mathbf{R}^2, e)$中的开球。

61. 求证：$\|f\|=\int_0^1|f(x)|dx$是$\mathscr{C}[0, 1]$上的一个范数。

62．设X是一个赋范空间，求证由$f(x)=\|x\|$所定义的函数f：$X\to\mathbf{R}$是连续的。

补充习题答案

36．由$f(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } x=0\\ 0 & \text{若 } 0<x\leqslant 1\end{cases}$

所定义的函数f：$[0, 1]\to\mathbf{R}$是（Riemann）可积的，即属于$\mathscr{R}[0, 1]$。零函数g：$[0, 1]\to\mathbf{R}$，即对所有$x\in[0, 1]$ $g(x)=0$也属于$\mathscr{R}[0, 1]$。但$\rho(f,g)=0$而$f\neq g$。因而ρ不是一个度量，因为它不满足$[M_4]$。

38．令$A=\{2, 3, 4, 5, \cdots\}$而

$$B=\left\{2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{3},\ 4\frac{1}{4},\ \cdots\right\}。$$

46．设d为包含多于一个点的集X上的平凡度量，则对任一$p\in X$

$$S(p, 1)=\{x:\ d(p, x)<1\}=\{p\}$$
$$\overline{S}(p, 1)=\{x: d(p, x)\leqslant 1\}=X,$$

但d诱生出X上的离散拓扑，所以X上的每一子集是既开又闭的，于是

$$\overline{S(d, 1)}=\overline{\{p\}}=\{p\}\neq\overline{S}(p, 1)。$$

58．提示：证明类似于习题30。

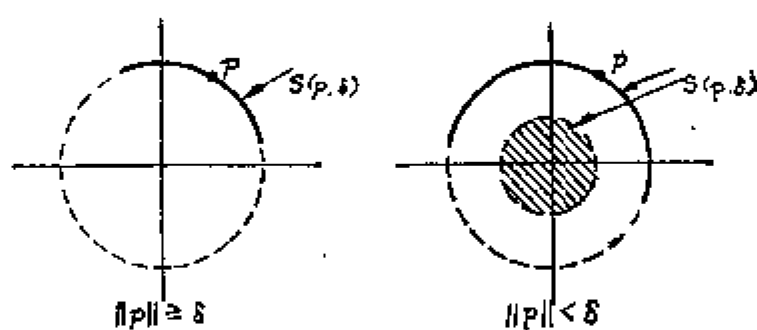
60（ii）若$\|p\|\geqslant\delta$，则$S(p, \delta)$是圆

$$\{x:\ \|x\|=\|p\|\}$$

的一段弧。若$\|p\|<\delta$，则$S(p, \delta)$由圆

$$\{x:\ \|x\|=\delta-\|p\|\}$$

的内点和圆$\{x:\ \|x\|=\|p\|\}$的一段弧上的点组成。



61. $\|f+g\|=\int_0^1 |f(x)+g(x)|dx$

$$\leqslant\int_0^1 (|f(x)|+|g(x)|)dx$$

$$=\int_0^1 |f(x)|dx+\int_0^1 |g(x)|dx=\|f\|+\|g\|。$$

第九章 可 数 性

第一可数空间（First countable spaces）

一个拓扑空间X若满足下面的公理：

$[C_1]$ 对于X中每点p，有可数的开集组$\mathscr{B}_p$存在，其中每个开集都含p点，使得每个含p点的开集G也都含有$\mathscr{B}_p$中的集。

则称X为一个**第一可数空间**（first countable space）上述公理$[C_1]$称为**第一可数公理**(first axiom of countability)。

换句话说，一个拓扑空间X是第一可数空间，当且仅当在每点$p\in X$处都有一个可数的局部基存在。注意：公理$[C_1]$是拓扑空间X的一个**局部性质**（local property），即它只与p点的任意领域的性质有关。

例1.1 设X为度量空间。又设$p\in X$。注意：可数开球组$\left\{S(p, 1), S\left(p, \frac{1}{2}, \right), S\left(p, \frac{1}{3}\right), \cdots\right\}$，其中每个球都以$p$为中心，构成$p$点处的一个局部基。由此可见：每个度量空间都满足第一可数公理。

例1.2 设X为任一离散空间，则单元素集$\{p\}$是开集并含在每个含$p\in X$的开集G中，故每个离散空间都满足$[C_1]$。

第一可数空间有下述性质（在实直线$\mathbf{R}$的特殊情况下已经证明过）：

定理 9.1 定义在第一可数空间X上的函数在点$p\in X$处为连续，当且仅当它在p处序列连续。

换句话说，若X满足$[C_1]$，则$f: X\to Y$在$p\in X$处为连续，当且仅当对于X中任何收敛于p的序列$\langle a_n\rangle$来说，序列$\langle f(a_n)\rangle$在Y中收敛于$f(p)$，即

$$a_n\to p \text{ 意指 } f(a_n)\to f(p)。$$

注意 若$\mathscr{B}_p$是在点$p\in X$处的一个可数局部基，则我们可以用$\mathbf{N}$来把$\mathscr{B}_p$中的元素编号，即可以把$\mathscr{B}_p$写成：

$$\mathscr{B}_p=\{B_1, B_2, \cdots\}$$

(在$\mathscr{B}_p$是有限组时，我们允许$\mathscr{B}_p$中的集重复出现)。若还有$B_1\supset B_2\supset B_3\supset\cdots$，则称$\mathscr{B}_p$为$p$点处的一个**局部套基** (nested local base)，我们在习题解答中将证明，**从一个可数局部基必能造一个局部套基。**

第二可数空间 (Second countable spaces)

一个拓扑空间(X, τ)若满足下面的公理：

$[C_2]$ 拓扑τ有一个可数基$\mathscr{B}$。

则称为一个**第二可数空间** (second countable space)，上述公理称为**第二可数公理** (second axiom of countability)。

注意：第二可数性是拓扑空间的一个整体性质（或称：大范围的性质)而不是一个局部性质。

例 2.1 以有理点为端点的开区间(a, b)所成的组（即$a, b\in\mathbf{Q}$的一切区间）$\mathscr{B}$是可数的，并且是构成实直线$\mathbf{R}$上通常拓扑的一个基，所以$\mathbf{R}$是一个第二可数空间，即$\mathbf{R}$满足$[C_2]$。

例 2.2 考察实直线$\mathbf{R}$上的离散拓扑$\mathscr{D}$。一个集组$\mathscr{B}$能

成为离散拓扑的一个基，当且仅当它包含所有的单元素集，但 **R** 是不可数的，从而 **R** 中的一切单元素集所成之组也是不可数的，因此（**R**, $\mathscr{D}$）不满足第二可数公理。

设$\mathscr{B}$是空间X的一个可数基，又设 $\mathscr{B}_p$ 是由$\mathscr{B}$中所有含 p 点的集构成的组，则 $\mathscr{B}_p$ 是 p 处的局部可数基。换句话说，有下面的命题：

命题 9.2 第二可数空间也必是第一可数的。

另一方面，由例 2.2 知：赋予离散拓扑的实直线 **R** 不满足 $[C_2]$；但由例 1.2 知它却满足 $[C_1]$。因此看出上述命题的逆命题是不成立的。

Lindelöf 定理

首先引入几个术语：设 $A\subset X$；又设$\mathscr{A}$为X的一个子集组。若

$$A\subset\bigcup\{E; E\in\mathscr{A}\}$$

则称$\mathscr{A}$为A的一个**复盖** (cover，或 covering)，或说"$\mathscr{A}$复盖A"。若$\mathscr{A}$中每个集都是X的开集，则称$\mathscr{A}$为A的一个**开复盖** (open cover)。若$\mathscr{A}$含有一个可数的（或有限的）子组，这个子组也能复盖A，则称"$\mathscr{A}$可**简化为一个可数（或有限）复盖**" (reducible to a countable(finite)cover) 或说 "$\mathscr{A}$含一可数（或有限）**子复盖**(subcover)"。

第二可数空间的最基本的性质包含在下面两个定理中，这些定理是属于 Lindelöf 的。

定理 9.3 设A为第二可数空间X的任一子集，则A的任何开复盖可简化为一个可数复盖。

定理 9.4 设X为第二可数空间，则X的任何基$\mathscr{B}$均可简化

为X的一个可数基。

上述定理引出所谓 Lindelöf 空间的概念。一个拓扑空间X称为一个 **Lindelöf 空间**是指X的任何一个开复盖都可简化为一个可数复盖。因此每个第二可数空间都是一个 Lindelöf 空间。

可分空间(Separable spaces)

一个拓扑空间X若满足以下公理：

[S] X含有一个可数的稠密子集。

则称X为**可分** (separable)。

换句话说：X为可分，当且仅当存在X的有限子集A或可列子集A，使得A的闭包就是全空间，即$\bar{A}=X$。

例 3.1 实直线 $\mathbf{R}$ 赋以通常拓扑时，是一个可分空间，因为有理数集 $\mathbf{Q}$ 可数而且在 $\mathbf{R}$ 中稠密，即$\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$。

例 3.2 考察赋以离散拓扑$\mathscr{D}$的实直线 $\mathbf{R}$，则 $\mathbf{R}$ 中任何集都既是$\mathscr{D}$—开集也是$\mathscr{D}$—闭集，因此 $\mathbf{R}$ 中唯一的$\mathscr{D}$—稠密集就是 $\mathbf{R}$ 本身。但 $\mathbf{R}$ 是不可数的，故$(\mathbf{R},\mathscr{D})$不是可分空间。

我们将说明任何第二可数空间也是可分的。

命题 9.5 若X满足第二可数公理，则X是可分的。

设对实直线 $\mathbf{R}$ 赋以由一切左闭右开区间$[a, b)$所成的区间组所产生的拓扑 τ，则它是可分空间而不满足第二可数公理的典型例子，所以上述命题的逆命题一般是不成立的。然而，下面的特殊情况却是成立的。

定理 9.6 可分的度量空间是第二可数空间。

例 3.3 设$C[0, 1]$表示闭区间$[0, 1]$上的连续函数全

体所构成的线性空间，并在其中赋以由下面公式定义的范数：

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|: 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

则由 Weierstrass 逼近定理知道：对于任何函数 $f\in C[0, 1]$ 及任一 $\varepsilon>0$，存在具有理系数的多项式 p 使

$$\|f-p\|<\varepsilon$$

即 $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$ 对一切 $x\in[0, 1]$ 成立。

因此，所有这些多项式构成之集 $\mathscr{P}$ 在 $C[0, 1]$ 中稠密，但 $\mathscr{P}$ 是可数集，因此 $C[0, 1]$ 可分。于是由定理 9.6，$C[0, 1]$ 是第二可数的。

在最后一例中我们来说明度量空间可以是不可分的。

例 3.4 考察平面 $\mathbf{R}^2$ 上由下面公式

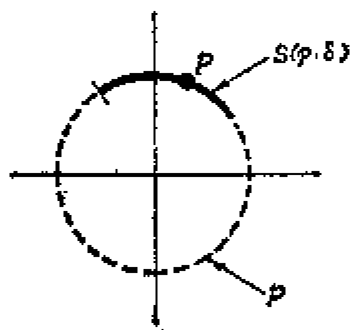
$$e(p, q)=\begin{cases}\|p\|+\|q\| & 若\ \|p\|\neq\|q\|\\ d(p, q) & 若\ \|p\|=\|q\|\end{cases}$$

定义的度量 e，其中 $\|\cdots\|$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 上的欧氏范数，而 d 是诱生的通常度量（见第八章，习题 60）。

注意：若 $p\neq(0, 0)$，且 $\delta<\|p\|$，则 e-开球 $S(p, \delta)$ 只由圆周

$$P=\{x: \|x\|=\|p\|\}$$

上的一些点所构成（见附图）。因此，p 不可能成为任一集 $A\subset\mathbf{R}^2$ 的一个聚点，除非 A 含有圆周 P 上的点。但是以 $(0, 0)$ 为中心的圆周的数量是不可数的，因此一般说 $A\subset\mathbf{R}^2$ 不可能在 $\mathbf{R}^2$ 中稠密，除非 A 是不可数的，这就说明度量空间 $(\mathbf{R}^2, e)$ 是不可分的。



遗传性（Hereditary properties）

设 P 为拓扑空间 X 的一个性质，若 X 的任何子空间也都

有这个性质 P，则称 P 为**一个可遗传的性质**（hereditary property）。我们将证明第二可数空间的任何子空间是第二可数的，第一可数空间的任何子空间是第一可数的。

换句话说，第一可数性 $[C_1]$ 及第二可数性 $[C_2]$ 都是可遗传的。另一方面，我们将用反例来说明，可分空间的子空间可以是不可分的，即可分性是不可遗传的。

最后用下面的图作为结束，它仅给出本章中三个公理之间的关系：

$$\text{可分性} \longleftarrow \text{第二可数性} \longrightarrow \text{第一可数性}$$

其中箭头表示"导致"的意思，这就是命题 9.2 及命题 9.5 的内容。

习 题 解 答

第一可数空间

1. 求证：第一可数空间 (X, τ) 的任何子空间 (Y, τ_Y) 也是第一可数的。

解：设 $p \in Y$。因 $Y \subset X$，故 $p \in X$。按假设 (X, τ) 是第一可数空间，故 p 处有可数的 τ-局部基 $\mathscr{B}_p = \{B_n: n \in \mathbf{N}\}$ 存在。由以前的习题知道 $\mathscr{B}_p^* = \{Y \cap B_n: n \in \mathbf{N}\}$ 是 p 处的一个 τ_Y-局部基。由于 $\mathscr{B}_p^*$ 是可数的，因此 (Y, τ_Y) 满足 $[C_1]$。

2、设 $\mathscr{B}_p = \{G_1, G_2, \cdots\}$ 是 $p \in X$ 处一个可数局部基。求证：

（i）在 p 处有一个局部套基存在。

（ii）若 X 满足 $[C_1]$，则在每点 $p \in X$ 处都有局部套基

存在。

解：(i) 令 $B_1=G_1$，$B_2=G_1\cap G_2$，…，$B_n=G_1\cap\cdots\cap G_n$，…，则 $B_1\supset B_2\supset\cdots$，且每个 B_k 都是含 p 点的开集，另外设 G 为含 p 的一个开集，则

$$有\ n_0\in\mathbf{N}\ 使\ B_{n0}\subset G_{n0}\subset G,$$

因此，$\{B_1, B_2, \cdots\}$ 是 p 点处一个局部套基。

(ii) 若 X 满足 $[C_1]$。设任一 $p\in X$，则由 $[C_1]$，在 p 处有一可数局部基存在。于是利用 (i)，在 p 处有一个局部套基存在。

3. 设 $\mathscr{B}_p=\{B_1, B_2, \cdots\}$ 是 $p\in X$ 处一个局部套基，又设序列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 满足：$a_1\in B_1$，$a_2\in B_2$，…。求证：$\langle a_n\rangle$ 收敛于 p。

解：设 G 为含 p 的开集。因 $\mathscr{B}_p$ 是 p 处的一个局部基，故

$$有\ n_0\in\mathbf{N}\ 使得\ B_{n0}\subset G,$$

但 $\mathscr{B}_p$ 是套基，故当 $n>n_0$ 时有 $a_n\in B_{n0}\subset G$，因此 $a_n\to p$。

4. 设 τ 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的有限余拓扑，即 τ 由 $\varnothing$ 及有限集的余集所构成。求证：$(\mathbf{R}, \tau)$ 不满足第一可数公理。

解：用反证法。假设 $(\mathbf{R}, \tau)$ 是满足 $[C_1]$ 的，则 $1\in\mathbf{R}$ 有可数的局部开基 $\mathscr{B}_1=\{B_n: n\in\mathbf{N}\}$。因每个 B_n 是 τ—开集，故它的余集 B_n^c 是 τ—闭集，从而是有限集，因此 $A=\bigcup\{B_n^c: n\in\mathbf{N}\}$ 作为可数个有限集之并是可数的。但 $\mathbf{R}$ 是不可数的，故有点 $p\in\mathbf{R}$ 存在，它异于 1，而又不属于 A，即 $p\in A^c$。

现在，由 De Morgan 定律，得

$$p\in A^c=(\bigcup\{B_n^c: n\in\mathbf{N}\})^c$$

$$=\bigcap\{B_n^{cc}: n\in \mathbf{N}\}$$
$$=\bigcap\{B_n: n\in \mathbf{N}\}$$

因此对于每个 $n\in \mathbf{N}$, $p\in B_n$。另一方面，$\{p\}^c$ 作为有限集的余集是 τ—开集，而且由于 $p\neq 1$，所以 $\{p\}^c$ 包含 1。由于 $\mathscr{B}_1$ 是局部基，故有 $B_{n0}\in\mathscr{B}_1$ 使 $B_{n0}\subset\{p\}^c$，因此 $p\notin B_{n0}$，但这和"对于每个 $n\in \mathbf{N}$, $p\in B_n$"的结论是互相矛盾的。从而推得最初关于 $(\mathbf{R}, \tau)$ 满足第一可数公理的假定是错误的。

5. 求证定理 9.1：设 X 满足第一可数公理，则 $f: X\to Y$ 在 $p\in X$ 为连续的充要条件是它在 p 处为序列连续。

解：因对任何拓扑空间，前已证明：若 f 在 p 连续则 f 必在 p 序列连续，故我们只须证明它的逆命题，实际上只须证明逆否命题：若 f 在 p 不连续，则 f 在 p 也必不序列连续。

设 $\mathscr{B}_p=\{B_1, B_2, \cdots\}$ 为 p 处的一个局部套基，又设 f 在 p 不连续，则 Y 中有开集 H 存在，使

$f(p)\in H$ 但 $B_n\not\subset f^{-1}[H]$ 对每个 $n\in \mathbf{N}$ 成立。

于是对每个 $n\in \mathbf{N}$,

有 $a_n\in B_n$ 使 $a_n\notin f^{-1}[H]$ 它导致 $f(a_n)\notin H$。

现在由以前的习题得

$$a_n\longrightarrow p \quad 而 \quad f(a_n)\not\longrightarrow f(p)$$

因为含 $f(p)$ 的开集 H 不含序列的任何项。从而，f 在 p 处不是序列连续。

第二可数空间

6. 求证：平面 $\mathbf{R}^2$ 赋以通常拓扑满足第二可数公理。

解：平面 $\mathbf{R}^2$ 上一点，若其两个坐标都是有理数时，称

为“有理点”；平面上一线段，若其长为有理数时，称为“有理线段”。设$\mathscr{B}$表示平面 $\mathbf{R}^2$ 上一切以有理点为中心，以有理线段为半径的开圆盘所成的组，则$\mathscr{B}$是个可数集，同时又是 $\mathbf{R}^2$ 上通常拓扑的一个基。因此 $\mathbf{R}^2$ 是一个第二可数空间。

7. 求证：第二可数空间的任何子空间都是第二可数的。

解：设 $\mathscr{B}=\{B_n: n\in\mathbf{N}\}$ 是第二可数空间X的一个可数基，Y 为X的一个子空间。则由以前的习题知道：$\mathscr{B}_Y=\{Y\cap B_n: n\in\mathbf{N}\}$ 是Y的一个基。由于 $\mathscr{B}_Y$ 是可数的，所以Y满足 $[C_2]$。

8. 求证 Lindelöf 定理 9.3：设A为第二可数空间X的任一子集，若$\mathscr{G}$是A的一个开复盖，则$\mathscr{G}$可简化为一个可数复盖。

解：设$\mathscr{B}$为X的一个可数基。因$\mathscr{G}$是A的一个开复盖，故 $A\subset\bigcup\{G: G\in\mathscr{G}\}$。于是对于每点 $p\in A$，有 $G_p\in\mathscr{G}$ 使 $p\in G_p$。又因$\mathscr{B}$是X的一个基，故对每点 $p\in A$，

$$有\ B_p\in\mathscr{B}\ 使\ p\in B_p\subset G_p$$

因此 $A\subset\bigcup\{B_p: p\in A\}$。但 $\{B_p: p\in A\}\subset\mathscr{B}$

因此是可数的，于是有

$$\{B_p: p\in A\}=\{B_n: n\in\mathbf{N}\}$$

其中 $\mathbf{N}$ 是一个可数的指标集。现在对每个 $n\in\mathbf{N}$，选一集 $G_n\in\mathscr{G}$ 使 $B_n\subset G_n$，则

$$A\subset\bigcup\{B_n: n\in\mathbf{N}\}\subset\bigcup\{G_n: n\in\mathbf{N}\}$$

所以 $\{G_n: n\in\mathbf{N}\}$ 是$\mathscr{G}$的一个可数子复盖。

9. 求证 Lindelöf 定理 9.4：若$\mathscr{G}$是第二可数空间X的一个基，则$\mathscr{G}$可简化为X的一个可数基。

解：因X是第二可数，故X有一可数基$\mathscr{B}=\{B_n: n\in \mathbf{N}\}$因$\mathscr{G}$也是$X$的一个基，故对每个$n\in \mathbf{N}$有：

$$B_n=\bigcup\{G: G\in \mathscr{G}_n\}，其中 \mathscr{G}_n\subset \mathscr{G}$$

所以$\mathscr{G}_n$是B_n的一个开复盖。而由前一习题，$\mathscr{G}_n$可以简化为一个可数复盖$\mathscr{G}_n^*$，即对每个$n\in \mathbf{N}$，有可数组$\mathscr{G}_n^*\subset \mathscr{G}$，使

$$B_n=\bigcup\{G: G\in \mathscr{G}_n^*\}$$

但由于$\mathscr{B}$是X的一个基，所以

$$\mathscr{G}^*=\{G: G\in \mathscr{G}_n^*, n\in \mathbf{N}\}$$

就成为X的一个基。另外$\mathscr{G}^*\subset \mathscr{G}$，且$\mathscr{G}^*$是可数的。

可分性

10．设τ是集X上的有限余拓扑，求证(X, τ)是可分的，即，它含有可数的稠密子集。

解：若X本身是可数的，则X自然是(X, τ)的可数稠密子集。另一方面，若X不可数，则它必含一可列集（即非有限的可数集）A。由于(X, τ)中的τ—闭集只能是有限集及X本身，故非有限可数集A的闭包只能是整个空间X。即$\overline{A}=X$。但A可数，因此(X, τ)可分。

11．求证：一个离散空间X为可分，当且仅当X可数。

解：注意：离散空间X中的任何子集都是既开又闭的。因此在X中稠密的子集只能是X本身。故X含一个可数稠密子集，当且仅当X可数，即X是可分的当且仅当X可数。

12．求证命题9.5：若X满足第二可数公理，则X是可分的。

解：因X满足$[C_2]$，故X有可数基$\mathscr{B}=\{B_n: n\in \mathbf{N}\}$，现

在对每个 $n\in\mathbf{N}$，选一点 $a_n\in B_n$，则集 $A=\{a_n: n\in\mathbf{N}\}$ 也是可数的。我们来证：$\bar{A}=X$，或等价地：当每点 $p\in A^c$(即 p 属于 A 的余集时)时 p 必是 A 的一个聚点。

为此，设 G 是含 p 的开集，则 G 至少含一集 $B_{n_0}\in\mathscr{B}$，因此 $a_{n_0}\in B_{n_0}\subset G$。现在因 $p\in A^c$ 但 $a_{n_0}\in A$，故 a_{n_0} 不同于 p，这就是任何含 p 的开集 G 必含一属于 A 而异于 p 的点，因而 p 是 A 的一个聚点。

13. 设 τ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上由下列一切"半开"矩形

$$[a, b)\times[c, d)=\{\langle x, y\rangle: a\leqslant x<b, c\leqslant y<d\}$$

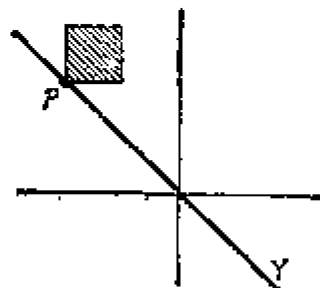
所产生的拓扑，求证：$(\mathbf{R}^2, \tau)$ 可分。

解：对于任何 $a<b$ 及 $c<d$，必有有理数 x_0 及 y_0 使 $a<x_0<b$ 及 $c<y_0<d$，因此上面的开矩形

$$[a, b)\times[c, d)$$

必含具有有理坐标的点 $\langle x_0, y_0\rangle$，就是说在 $\mathbf{R}^2$ 内具有理数坐标的一切点组成的集 $A=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中稠密，但 A 是可数的，故 $(\mathbf{R}^2, \tau)$ 可分。

14. 试举反例以证明：可分空间的子空间可以是不可分的。即：可分性不是可遗传的。



解：考察上一题的可分拓扑空间 $(\mathbf{R}^2, \tau)$。注意(见第六章习题 25) 直线

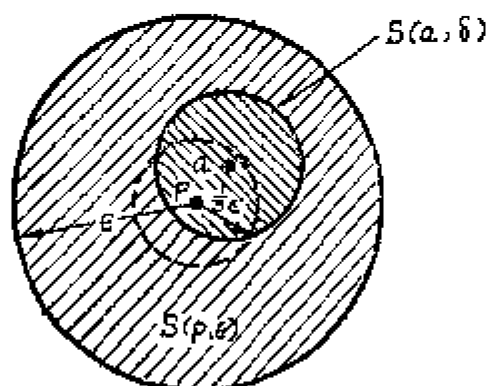
$$Y=\{\langle x, y\rangle: x+y=0\}$$

上的相对拓扑 τ_Y 是离散拓扑，因为 Y 上的每个单点集 $\{p\}$ 都是 τ_Y—开集(见图)。但一个不可数的离散空间是不可分的，所以 $(\mathbf{R}^2, \tau)$ 的可分性不可遗传到子空间 (Y, τ_Y) 上。

15. 设 $S(p, \varepsilon)$ 是度量空间 X 中的一个开球，又设

$d(p, a) < \frac{1}{3}\varepsilon$，求证：当 $\frac{\varepsilon}{3} < \delta < \frac{2}{3}\varepsilon$ 时

$$p \in S(a, \delta) \subset S(p, \varepsilon)。$$



解：因 $d(p, a) < \frac{1}{3}\varepsilon < \delta$，故 $p \in S(a, \delta)$。因此我们只要证 $S(a, \delta) \subset S(p, \varepsilon)$（见图）。

令 $x \in S(a, \delta)$，则 $d(a, x) < \delta$，由三角不等式

$$d(p, x) \leqslant d(p, a) + d(a, x)$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + \delta < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon。$$

所以 $x \in S(p, \varepsilon)$ 或 $S(a, \delta) \subset S(p, \varepsilon)$。

16. 求证定理9.6：设X是可分的度量空间，则X必满足$[C_2]$，即：它必含一个可数基。

解：因X可分，故X含一可数稠密子集A。令$\mathscr{B}$表示以A中之点为中心，以有理线段长为半径的全体开球所成的组，即：

$$\mathscr{B} = \{S(a, \delta): a \in A, \delta \in \mathbf{Q}\}$$

注意$\mathscr{B}$是一可数集。我们来证明$\mathscr{B}$是X上拓扑的一个基，即要证：对任何开集 $G \subset X$ 及任何点 $p \in G$，

$$有 S(a, \delta) \in \mathscr{B} 使 p \in S(a, \delta) \subset G。$$

证明如下：因 $p \in G$，故有以p为中心之开球 $S(p, \varepsilon)$ 使

$$p \in S(p, \varepsilon) \subset G。$$

又因A在X中稠密，故

$$有 a_0 \in A 使 d(p, a_0) < \frac{1}{3}\varepsilon。$$

设 δ_0 是个有理数，而使得 $\frac{1}{3}\varepsilon<\delta_0<\frac{2}{3}\varepsilon$，则由上一习题知：

$$p\in S(a_0, \delta_0)\subset S(p, \varepsilon)\subset G$$

但 $S(a_0, \delta_0)\in\mathscr{B}$，故$\mathscr{B}$是$X$上拓扑的一个可数基。

补 充 习 题

第一可数空间

17．求证作为第一可数空间的性质是一个拓扑性质。

18．设 $\mathscr{B}_p=\{B_1, B_2, \cdots\}$ 是在 $p\in X$ 处的一个局部套基，求证 $\mathscr{B}_p$ 的任一子序列 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots\}$ 也是在 p 处的一个局部套基。

19．设 τ 是实直线 $\mathbf{R}$ 上由左闭右开区间 $[a, b)$ 所产生的拓扑，求证 $(\mathbf{R}, \tau)$ 由于在任一点 $p\in\mathbf{R}$ 处具有可数局部基而满足 $[C_1]$。

20．设 τ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上由半开矩形

$$[a, b)\times[c, d)=\{\langle x, y\rangle: a\leqslant x<b, c\leqslant y<d\}$$

产生的拓扑，求证 $(\mathbf{R}^2, \tau)$ 由于在任一点 $p\in\mathbf{R}^2$ 处具有可数局部基而满足 $[C_1]$。

21．设 τ 与 τ^* 是X上的拓扑，τ 粗于 τ^*，即 $\tau\subset\tau^*$。

（i）求证如果 (X, τ^*) 是第一可数的，则 (X, τ) 也如此。

（ii）用反例说明(i)的逆命题不真。

第二可数空间

22．求证作为第二可数空间的性质是一个拓扑性质。

23．求证若X有一个可数的准基，则X满足$[C_2]$。

24．试给出m维欧氏空间的一个可数基。

25．设$\mathscr{A}$是第二可数空间X的任一二二互斥的开子集组，求证$\mathscr{A}$是一个可数组。

26．设A是第二可数空间X的不可数子集，求证A至少有一个聚点。

27．设τ是实直线$\mathbf{R}$上由左闭右开区间$[a, b)$所产生的拓扑，求证$(\mathbf{R}, \tau)$不满足$[C_2]$。

28．求证l_2-空间(Hilbert 空间)是第二可数的。

可分空间

29．求证作为可分空间的性质是一个拓扑性质。

30．求证m维欧氏空间是可分的。

31．求证l_2-空间(Hilbert 空间)是可分的。

32．设τ是实直线$\mathbf{R}$上由左闭右开区间$[a, b)$所产生的拓扑，求证$(\mathbf{R}, \tau)$是可分的。

33．设τ与τ^*是X上的拓扑，τ粗于τ^*，即$\tau \subset \tau^*$。

(i) 求证若(X, τ^*)是可分的，则(X, τ)也是可分的。

(ii) 用反例证明(i)的逆命题不真。

34．设$C[0, 1]$表示$[0, 1]$上连续函数的集组，赋以范数

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

求证$C[0, 1]$是可分的，因此也是第二可数的。

Lindelöf 空间

35．求证 Lindelöf 空间的连续象也是 Lindelöf 空间。

36．设 A 是 Lindelöf 空间 X 的一个闭子集。求证具有相对拓扑的 A 也是一个 Lindelöf 空间。

37．求证一个离散空间 X 是 Lindelöf 空间，当且仅当 X 是一个可数集。

38．设 τ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上由半开矩形

$$[a, b)\times[c, d)=\{\langle x, y\rangle: a\leqslant x<b, c\leqslant y<d\}$$

所产生的拓扑（见习题 14）。τ 诱生了直线 $Y=\{\langle x, y\rangle: x+y=1\}$ 上的离散拓扑。求证 $(\mathbf{R}^2, \tau)$ 不是 Lindelöf 的，因而 $(\mathbf{R}^2, \tau)$ 是一个不满足第二可数公理的可分的第一可数空间。

第十章　隔离性公理

引言（Introduction）

拓扑空间X的许多性质都同该空间中开集的"多少"有关。大致可以这样说：一个拓扑空间具有的开集"越少"，则它越可能是可分的或是第一可数的或是第二可数的。反之，一个拓扑空间具有的开集"越多"，则其上的函数越容易连续，其中的点列越容易有唯一的极限。

本章讨论的 Alexandroff 与 Hopf 的**隔离性公理**（separation axioms）要求空间具有"足够多"的开集。

T_1 空间（T_1—spaces）

一个拓扑空间X称为一个 T_1 **空间**（T_1-space）是指它满足以下的公理：

[T_1]：　任给X中两个不同的点 a 与b，则每一点都属于一个开集，而这个开集不含有另一点，换句话说，有开集G与开集 H，使：

$$a\in G,\ b\notin G \quad \text{而} \quad b\in H,\ a\notin H。$$

注意：开集G与H是不必互斥的。

下面的定理刻划出 T_1 空间的非常简单的特征：

定理 10.1　拓扑空间X是一个 T_1 空间，当且仅当X中的每个单元素集 $\{p\}$ 都是闭集。

由于闭集的有限并也是闭集，故由上述定理得出以下推论：

推论 10.2 (X, τ) 为 T_1 空间，当且仅当 τ 包含 X 上的有限余拓扑。

例 1.1 每个度量空间 X 都是 T_1 空间，因为已经证明过 X 中的有限集都是闭集。

例 1.2 考察 $X=\{a, b\}$ 上的拓扑 $\tau=\{X, \varnothing, \{a\}\}$。注意：$\tau$ 中能含 b 点的唯一开集是 X，而 X 也含 a，由此可知 (X, τ) 不满足 $[T_1]$，即不是 T_1 空间。又：单元素集 $\{a\}$ 非闭集，因它的余集 $\{b\}$ 非开集。

例 1.3 X 上的有限余拓扑是使 (X, τ) 成为 T_1 空间的最粗的拓扑(推论 10.2)。因此，有限余拓扑也称为 T_1 拓扑 (T_1-topology)。

Hausdorff 空间 (Hausdorff spaces)

拓扑空间 X 称为 **Hausdorff 空间**或 **T_2 空间**(T_2-space) 是指它满足下面的公理：

$[T_2]$： X 中任何不相同的两点都分别属于两个互斥的开集。

换句话说，有开集 G 与 H 存在，使

$$a \in G,\ b \in H,\ 而\ G \cap H=\varnothing。$$

注意：Hausdorff 空间必然是 T_1 空间。

例 2.1 我们来证明：任何度量空间 X 是 Hausdorff 空间。设 $a, b \in X$ 是两个不同的点，则由 $[M_4]$ 有：

$$d(a, b)=\varepsilon>0$$

考察分别以 a 与 b 为中心的开球 $G=S\left(a, \frac{1}{3}\varepsilon\right)$ 与 $H=S$

$\left(b, \frac{1}{3}\varepsilon\right)$，易证$G$与$H$是互斥的。因若$p\in G\cap H$，则$d(a, p)<\frac{1}{3}\varepsilon$, $d(b, p)<\frac{1}{3}\varepsilon$，从而由三角不等式得

$$d(a, b)\leqslant d(a, p)+d(p, b)<\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\frac{2}{3}\varepsilon。$$

但是这和$d(a, b)=\varepsilon$是互相矛盾的，因此G与H互斥，即a与b分别属于两个互斥的开球G和H。这证明了X是 Hausdorff 空间。

这个例题的结果可以叙述成定理，即：

定理 10.3 任何度量空间是Hausdorff 空间。

例 2.2 设τ为实直线$\mathbf{R}$上的有限余拓扑(即T_1拓扑)，现在来证明($\mathbf{R}$, τ)不是 Hausdorff 空间，为此，设G与H为任意非空的τ—开集。则G与H都是无限集，因它们都是有限集的余集。假设$G\cap H=\varnothing$，则无限集$G\subset H^c$，而H^c为有限集，这不可能，因此G与H不是互斥的。从而在$\mathbf{R}$中不可能有两个不同点分别属于互斥的两个τ—开集。因此T_1空间可以不是Hausdorff 空间。

注意：在一个拓扑空间X中，一个点列$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$一般是可以收敛于$X$中的不止一点的，但当$X$是 Hausdorff 空间时，这种情况不会发生。

定理 10.4 若X是 Hausdorff 空间，则在X中每个收敛的点列有唯一的极限。

上述定理的逆命题是不成立的，除非增添附加条件。

定理 10.5 若X是第一可数空间，则X是 Hausdorff 空间的充要条件是其中的每个收敛点列有唯一的极限。

注意 点列概念已被推广成为"网"(net)(也称 moore-smith

序列）的概念及“过滤”（filter）的概念，利用这些概念可得下述结论：

定理 10.4 A X 是 Hausdorff 空间，当且仅当 X 中任何收敛网只有唯一的极限。

定理 10.4 B X 是 Hausdorff 空间，当且仅当 X 中每个收敛的过滤只有唯一的极限。

网和过滤这两个概念的定义和上述两个定理的证明，都超出了本书的范围。

正则空间（Regular spaces）

拓扑空间 X 称为**正则**（regular）空间是指它满足以下的公理：

[R]：若 F 是 X 的闭集，$p\in X$ 而不属于 F，则有互斥开集 G 与 H 存在，使 $F\subset G$ 及 $p\in H$。

正则空间可以不是 T_1 空间，如下例所示。

例 3.1 考察集 $X=\{a,b,c\}$ 上的拓扑 $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\}\}$。注意：$X$ 中的闭集恰好也是 X，$\varnothing$，$\{a\}$ 及 $\{b,c\}$。所以 (X,τ) 是满足 [R] 的。但另一方面 (X,τ) 不是 T_1 空间，因为其中有一些有限集，例如单元素集 $\{b\}$，它们都不是闭集。

一个正则空间 X 而又满足隔离性公理 [T_1]，即正则的 T_1 空间称为一个 T_3 **空间**（T_3-space）。

例 3.2 若 X 是 T_3 空间，则 X 也是 Hausdorff 空间（即 T_2 空间）。为证明这一点，设 $a,b\in X$ 为两个不同的点，因 X 是 T_1 空间，故 $\{a\}$ 是一闭集；又因 a,b 不同故 $b\notin\{a\}$。于是由公理 [R] 有互斥开集 G 与 H 使 $\{a\}\subset G$ 及 $b\in H$，因

此 a, b 分别属于互斥的开集G与H。

正规空间(Normal spaces)

拓扑空间X称为**正规空间**，是指它满足以下公理：

[N]： 若F_1及F_2是X中互斥的闭集，则有互斥的开集G与H存在，使$F_1\subset G$及$F_2\subset H$。

正规空间的特征也可用下面的定理来刻划：

定理 10.6 拓扑空间X为正规空间，当且仅当对于任何闭集F及包含F的开集H，有开集G存在使得

$$F\subset G\subset \bar{G}\subset H。$$

例 4.1 由隔离性定理 8.8 可知：任何度量空间是正规的。

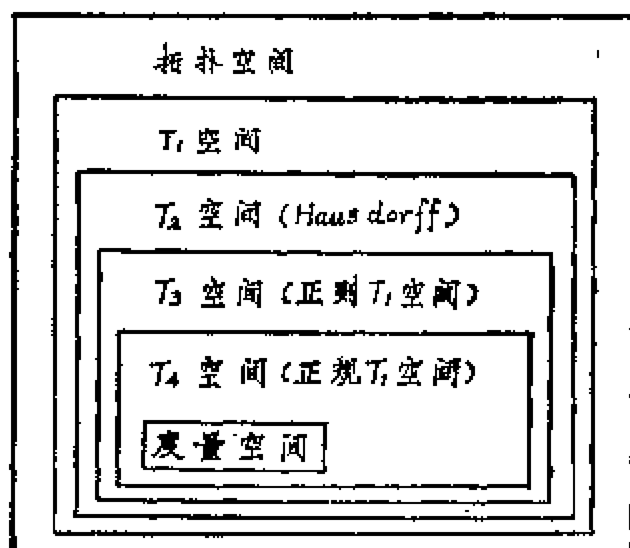
例 4.2 考察$X=\{a, b, c\}$上的拓扑$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$。注意：$(X, \tau)$中的闭集是$X$, $\varnothing$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{c\}$。若F_1, F_2为(X, τ)中两个互斥的闭集，则其中之一譬如说F_1必须是空集$\varnothing$。因此$\varnothing$与X便是互斥的开集且$F_1\subset\varnothing$及$F_2\subset X$，换句话说(X, τ)是正规空间。另一方面，由于单元素集$\{a\}$不是闭集，所以(X, τ)不是T_1空间。又：由于$a\notin\{c\}$而能包含$\{c\}$的开集只有一个即X，而X又包含a，所以(X, τ)也不是正则空间。

一个正规空间X若还满足隔离性公理[T_1]，即正规的T_1空间称为**T_4 空间**(T_4-space)。

例 4.3 易证：设X是T_4空间，则它必是T_3空间(即正则的T_1空间)。为此，设F是X中的闭集，又设$p\in X$, $p\notin F$，则由[T_1]，$\{p\}$是闭集，且因F和$\{p\}$是互斥的，于是再由[N]，有互斥开集G与H使$F\subset G$及$p\in\{p\}\subset H$。

现在我们知道：度量空间是正规空间又是T_1空间，即

度量空间都是 T_4 空间。下面的图说明本章讨论的几类空间之间的关系：



Urysohn引理及度量化定理（Urysohn's lemmaand metrization theorem）

以下是 Urysohn 的经典的成果：

定理 10.7 （Urysohn 引理）设 F_1 与 F_2 为正规空间 X 中的互斥闭集，则有连续函数 $f: X \to [0, 1]$ 存在，使

$$f[F_1]=\{0\} \quad 与 \quad f[F_2]=\{1\}$$

作为 Urysohn 引理的一个重要的应用是使第八章所讨论的度量化问题得到部分的解决，这就是下面的定理。

定理 10.8 （Urysohn's metrization theorem），任何第二可数正规 T_1 空间是可度量化的。

实际上，我们将证：任何第二可数正规 T_1 空间同胚于 $\mathbf{R}^\infty$ 中的 Hilbert 立方体的一个子集。

将点隔离的函数组(Functions that separate points)

设$\mathscr{A}=\{f_i: i\in I\}$是从集$X$到集$Y$的函数组，函数组$\mathscr{A}$称为一个**"将点隔离"**的函数组(separate points)是指：对于X中任何两个不同的点a与b，$\mathscr{A}$中总有这样的函数f存在，使$f(a)\neq f(b)$。

例 5.1 考察下面定义在$\mathbf{R}$上的实值函数组：

$$\mathscr{A}=\{f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\sin 2x,\ f_3(x)=\sin 3x,\ \cdots\}$$

注意：因为对每个函数$f_n\in\mathscr{A}$都有$f_n(0)=f_n(\pi)=0$，所以$\mathscr{A}$不是将点隔离的函数组。

例 5.2 设$C(X,\mathbf{R})$表示拓扑空间X上的一切实值连续函数所成的组，可证：若$C(X,\mathbf{R})$是将点隔离的组，则X是Hausdorff空间。为此，设$a,b\in X$为两个不同的点，按假设有连续函数$f: X\to\mathbf{R}$使$f(a)\neq f(b)$，但$\mathbf{R}$是Hausdorff空间，故$\mathbf{R}$中有互斥开集G与H，分别含有$f(a)$与$f(b)$。因此，逆象$f^{-1}[G]$与$f^{-1}[H]$是互斥开集，并且分别含有a与b，换句话说X是一个Hausdorff空间。

将此例的结果叙述成一命题如下：

命题 10.9 若拓扑空间X上所有的实值函数所成之组$C(X,\mathbf{R})$是一个将点隔离的组，则X是Hausdorff空间。

完全正则空间(Completely regular spaces)

拓扑空间X称为**完全正则**(completely regular)是指X满足下面的公理：

[CR] 若F是X中的闭集，$p\in X$但不属于F，则有连续函数$f: X\to[0,1]$存在使$f(p)=0$与$f[F]=\{1\}$。以

后将证明下面的命题。

命题 10.10 完全正则空间也是正则的。

一个完全正则空间而又满足公理 $[T_1]$，即完全正则的 T_1 空间称为 **Tychonoff 空间** (Tychonoff space)。由 Urysohn 引理可知：T_4 空间是 Tychonoff 空间；另外，由命题 10.10，一个 Tychonoff 空间是一个 T_3 空间，因此，Tychonoff 空间即完全正则的 T_1 空间有时也称为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间。

Tychonoff 空间的一个重要性质如下：

定理 10.11 完全正则的 T_1 空间 X 上的一切实值连续函数所成的函数组 $C(X, \mathbf{R})$ 是将点隔离的函数组。

习 题 解 答

T_1 空间

1. 求证定理 10.1：拓扑空间 X 为 T_1 空间，当且仅当 X 中的每个单元素集都是闭集。

解：设 X 是 T_1 空间，又设 $p\in X$，要证 $\{p\}^c$ 是开集。为此，设 $x\in\{p\}^c$，则 $x\neq p$，并由 $[T_1]$ 得：

$$\text{有开集 } G_x \text{ 使 } x\in G_x \text{ 但 } p\notin G_x$$

故 $x\in G_x\subset\{p\}^c$，所以 $\{p\}^c=\bigcup\{G_x: x\in\{p\}^c\}$。从而 $\{p\}^c$ 作为开集之并是开集。于是 $\{p\}$ 是闭集。

反之，假设对于每点 $p\in X$，$\{p\}$ 是闭集。令 $a, b\in X$ 同时 $a\neq b$，则由 $a\neq b$ 得 $b\in\{a\}^c$，因此 $\{a\}^c$ 是含 b 但不含 a 的开集。同理 $\{b\}^c$ 是含 a 但不含 b 的开集，这就证明了 X 是 T_1 空间。

2. 求证："是 T_1 空间" 这个性质是可遗传的，即：T_1

空间的任何子空间也是 T_1 空间。

解：设 (X, τ) 是 T_1 空间，又设 (Y, τ_Y) 是 (X, τ) 的一个子空间，要证：Y 中的任何单元素集 $\{p\}$ 都是 τ_Y—闭集，或其等价形式：$Y\setminus\{p\}$ 是 τ_Y—开集。

由于 (X, τ) 是 T_1 空间，故 $X\setminus\{p\}$ 是 τ—开集。但

$$p\in Y\subset X \Longrightarrow Y\cap\{X\setminus\{p\}\}=Y\setminus\{p\}$$

因此，按子空间的定义可知 $Y\setminus\{p\}$ 是一个 τ_Y—开集，这就证明了 (Y, τ_Y) 也是一个 T_1 空间。

3．求证：T_1 空间 X 中的有限集是没有聚点的。

解：设 $A\subset X$ 含 n 个元素，譬如说 $A=\{a_1, \cdots, a_n\}$。由于 A 是 T_1 空间的有限集，所以它是闭集，从而 A 含有它的一切聚点。但 $\{a_2, \cdots, a_n\}$ 也是有限集因而也是闭集。从而 $\{a_2, \cdots, a_n\}^c$ 是含 a_1 的开集，然而 $\{a_2, \cdots, a_n\}^c$ 不含 A 中异于 a_1 的元素，故 a_1 不是 A 的聚点。同理，A 中的任何其他点都不是 A 的聚点，这就证明了 A 根本就没有聚点。

4．求证：任何有限的 T_1 空间 X 都是离散空间。

解：X 中任何集都是有限集因而都是闭集，X 中任何集都是有限集的余集，故又都是开集，所以 X 是离散空间。

5．求证：设 X 是 T_1 空间，则下列命题等价：

（i）$p\in X$ 是 A 的一个聚点。

（ii）每个含 p 的开集都含有 A 的无限个点。

解：由集的聚点定义知：(ii)$\Longrightarrow$(i)。故只要证(i)$\Longrightarrow$(ii)。

为此，设 G 是含 p 的开集，并且是只含 A 中有限个异于 p 的点，譬如说

$$B=(G\setminus\{p\})\cap A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

则因 B 是 T_1 空间 X 的有限子集，故 B 是闭集，从而 B^c 是开集。令 $H=G\cap B^c$，则 H 是开集，$p\in H$，但 H 不含 A 中异于 p 的点，所以 p 不 A 是的聚点。因而 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。

6. 设 X 为 T_1 空间，又设 $\mathscr{B}_p$ 是在 $p\in X$ 处的局部基，求证：若 $q\in X$ 不同于 p，则 $\mathscr{B}_p$ 中有元素不含 q。

解：因 $p\neq q$ 及 X 满足 $[T_1]$，故有开集 $G\subset X$，它含 p 而不含 q。现在 $\mathscr{B}_p$ 是 p 处的局部基。故 G 是 $\mathscr{B}_p$ 中某个集 B 的母集，这个集 B 就不含 q。

7. 设 X 是满足第一可数公理的 T_1 空间，求证：若 $p\in X$ 是集 $A\subset X$ 的一个聚点，则有收敛于 p 的点列存在，它以 A 的点为项，并且这些项是两两不相同的。

解：设 $\mathscr{B}=\{B_n\}$ 为 p 处的局部套基，令 $B_{i_1}=B_1$，因 p 是 A 的极限点，故 B_{i_1} 含有异于 p 的点 $a_1\in A$，由前一习题知，

$$有\ B_{i_2}\in\mathscr{B}\ 使\ a_1\notin B_{i_2}。$$

同理 B_{i_2} 含有异于 p 点的 $a_2\in A$，而因为 $a_1\notin B_{i_2}$，故 a_2 也不同于 a_1，再由前一习题知：

$$有\ B_{i_3}\in\mathscr{B}\ 使\ a_2\notin B_{i_3}。$$

另外，$a_2\in B_{i_2}$，$a_2\notin B_{i_3}\Longrightarrow B_{i_2}\supset B_{i_3}$。依此类推下去，则可从 $\mathscr{B}$ 中抽出一个子列 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots\}$ 来；从 A 中抽出一个点列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$，其中的项两两不同；而且 $a_1\in B_{i_1}$，$a_2\in B_{i_2}$，…。但 $\{B_{i_n}\}$ 也是 p 处的一个局部套基，所以 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 p。

Hausdorff 空间

8. 求证："是 Hausdorff 空间"这个性质是可遗传的，即：Hausdorff 空间的任何子空间也是 Hausdorff 空间。

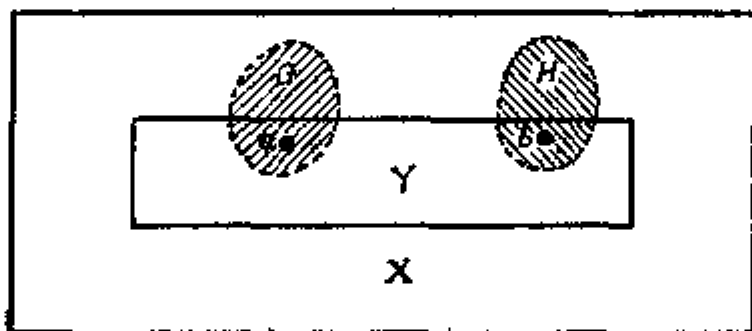
解：设 (X, τ) 是 Hausdorff 空间，又设 (Y, τ_Y) 是 (X, τ) 的子空间。此外，设 $a, b \in Y \subset X$ 同时 $a \neq b$。由假设，(X, τ) 是 Hausdorff 空间；因此，

$$\text{有 } G, H \in \tau \text{ 使 } a \in G, b \in H \text{ 及 } G \cap H = \varnothing$$

由子空间的定义，$Y \cap G$ 及 $Y \cap H$ 是 τ_Y-开集。而且，

$$a \in G, a \in Y \Longrightarrow a \in Y \cap G$$
$$b \in H, b \in Y \Longrightarrow b \in Y \cap H$$
$$G \cap H = \varnothing \Longrightarrow (Y \cap G) \cap (Y \cap H)$$
$$= Y \cap (G \cap H) = Y \cap \varnothing = \varnothing$$

（如下图所示）。从而 (Y, τ_Y) 也是一个 Hausdorff 空间。



9. 设 τ 是实直线 **R** 上由一切形如 $(a, b]$ 的左开右闭区间所产生的拓扑。求证：$(\mathbf{R}, \tau)$ 是 Hausdorff 空间。

解：设 $a, b \in \mathbf{R}$，同时 $a \neq b$，譬如说 $a < b$，取 $G = (a-1, a]$，又取 $H = (a, b]$。则 $G, H \in \tau$，$a \in G$，$b \in H$ 且 $G \cap H = \varnothing$。所以 (X, τ) 是 Hausdorff 空间。

10. 求证定理 10.4：设 X 是 Hausdorff 空间，则 X 中的每个收敛序列有唯一的极限。

解：设 $\langle a_1, a_2, \cdots \rangle$ 收敛于 a，又收敛于 b，且 $a \neq b$。则因 X 是 Hausdorff 空间，故有开集 G 与 H 使

$$a \in G, b \in H \text{ 而 } G \cap H = \varnothing。$$

由假设，$\langle a_n\rangle$ 收敛于 a。因此有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $n>n_0$ 就有 $a_n\in G$，即 G 含 $\langle a_n\rangle$ 中除有限项外的所有项。但 G 和 H 是互斥的，因此 H 只能含不属于 G 的 $\langle a_n\rangle$ 中有限多项。于是 $\langle a_n\rangle$ 不收敛于 b。但这就与假设矛盾，故 $a=b$。

11. 求证定理 10.5：若 X 是第一可数空间，则下列命题等价：(i) X 是 Hausdorff 空间。(ii) X 中每个收敛点列有唯一的极限。

解：由上一习题得(i)$\Longrightarrow$(ii)；因而只须证(ii)$\Longrightarrow$(i)。

用反证法，设 X 不是 Hausdorff 空间，则有 $a, b\in X$，$a\neq b$，使含 a 的任何开集必与含 b 的任何开集有非空的交。

现在令 $\{G_n\}$ 与 $\{H_n\}$ 分别为 a 与 b 处的局部套基，则对任何 $n\in\mathbf{N}$，均有 $G_n\cap H_n\neq\varnothing$，故有 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$，使得 $a_1\in G_1\cap H_1$，$a_2\in G_2\cap H_2$，…于是序列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 同时收敛于 a 与 b 两个不同点，这样定理就得到证明。

正规空间和 Urysohn 引理

12. 求证定理 10.6：设 X 是一个拓扑空间，则下列条件是等价的：(i) X 是正规空间，(ii) 若 H 是闭集 F 的一个开母集，则存在一个开集 G，使得 $F\subset G\subset\overline{G}\subset H$。

解：(i)$\Longrightarrow$(ii) 设 $F\subset H$，同时 F 是闭的而 H 是开的。则 H^c 是闭集，$F\cap H^c=\varnothing$。但 X 是正规的，因此

有开集 G 与 G^* 存在，使 $F\subset G$，$H^c\subset G^*$ 同时 $G\cap G^*=\varnothing$ 但由 $G\cap G^*=\varnothing\Longrightarrow G\subset G^{*c}$ 及 $H^c\subset G^*\Longrightarrow G^{*c}\subset H$ 此外，G^{*c} 是闭集；因此 $F\subset G\subset\overline{G}\subset G^{*c}\subset H$。

(ii)$\Longrightarrow$(i)。设 F_1 及 F_2 是互斥闭集。则 $F_1\subset F_2^c$，而 F_2^c 是开集。由 (ii)，

有开集G存在，使得 $F_1\subset G\subset\bar{G}\subset F_2^c$

但 $\bar{G}\subset F_2^c\Longrightarrow F_2\subset\bar{G}^c$ 及 $G\subset\bar{G}\Longrightarrow G\cap\bar{G}^c=\varnothing$，另外，$\bar{G}^c$是开集。于是 $F_1\subset G$ 及 $F_2\subset\bar{G}^c$，同时G与$\bar{G}^c$为互斥开集；因此X是正规空间。

13．设$\mathscr{B}$是正规 T_1 空间X的一个基，求证：对每个 $G_i\in\mathscr{B}$及任一点 $p\in G_i$，有 $G_j\in\mathscr{B}$ 存在，使 $p\in G_j\subset G_i$。

解：因X是 T_1 空间，故 $\{p\}$ 是闭集，因此 G_i 是闭集 $\{p\}$ 的一个开母集，于是由定理 10.6 知：

$$有开集\ G\ 使\ \{p\}\subset G\subset\bar{G}\subset G_i$$

因 $p\in G$ 及$\mathscr{B}$是基知：有 $G_j\in\mathscr{B}$，使 $p\in G_j\subset G$；

所以 $p\in\overline{G_j}\subset\bar{G}$。但$\bar{G}\subset G_i$，因此 $p\in\overline{G_j}\subset G_i$。

14．设D为单位区间[0，1]中以 2 的幂为分母的真分数集，即

$$D=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\cdots,\frac{15}{16},\cdots\right\}$$

求证：D在 [0，1] 中稠密。

解：为了证明 $\bar{D}=[0,1]$，只要证：任何开区间$(a-\delta, a+\delta)$，其中中心 $a\in[0,1]$，都含有D中的一点。为此，注意：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；因此给定 $\delta>0$ 后，有 $q=2^{n_0}$，使 $0<\frac{1}{q}<\delta$。考察下列区间：

$$\left[0,\frac{1}{q}\right],\ \left[\frac{1}{q},\ \frac{2}{q}\right],\ \left[\frac{2}{q},\ \frac{3}{q}\right],\cdots,$$

$$\left[\frac{q-2}{q},\ \frac{q-1}{q}\right],\ \left[\frac{q-1}{q},\ 1\right]$$

由于 [0，1] 就是上述区间的并，故它们中必有一个含 a，譬

如说$\left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q}\right]$含$a$，即$\frac{m}{q}\leqslant a\leqslant\frac{m+1}{q}$。但$\frac{1}{q}<\delta$，故

$$a-\delta<\frac{m}{q}\leqslant a<a+\delta$$

换句话说，开区间$(a-\delta, a+\delta)$含D中的点$\frac{m}{q}$，因此D在$[0, 1]$稠密。

15．求证定理10.7(Urysohn引理)：设F_1与F_2为正规空间X中的互斥闭集，则有连续函数f：$X\to[0, 1]$存在，使$f[F_1]=\{0\}$与$f[F_2]=\{1\}$。

解：按假设有$F_1\cap F_2=\varnothing$，故$F_1\subset F_2^c$。实际上因F_2是闭集，故F_2^c是闭集F_1的开母集，于是由定理10.6，有开集$G_{\frac{1}{2}}$存在，使

$$F_1\subset G_{\frac{1}{2}}\subset\overline{G}_{\frac{1}{2}}\subset F_2^c。$$

注意$G_{\frac{1}{2}}$是闭集F_1的开母集，F_2^c是闭集$\overline{G}_{\frac{1}{2}}$的开母集。因此由定理10.6又可知有开集$G_{\frac{1}{4}}$及$G_{\frac{3}{4}}$存在，使

$$F_1\subset G_{\frac{1}{4}}\subset\overline{G}_{\frac{1}{4}}\subset G_{\frac{1}{2}}\subset\overline{G}_{\frac{1}{2}}\subset G_{\frac{3}{4}}\subset\overline{G}_{\frac{3}{4}}\subset F_2^c$$

依此类推下去，则用D表示$[0, 1]$中以$2^n(n\in\mathbf{N})$为分母的分数全体时，对于每个$t\in D$，有一个开集G_t与之对应，这些开集具备这样的性质：当$t_1, t_2\in D$而$t_1<t_2$时，有：$\overline{G_{t_1}}\subset G_{t_2}$。

现在，在X上定义一个函数f如下：

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{t: x\in G_t\} & 若\ x\notin F_2\\ 1 & 若\ x\in F_2\end{cases}$$

注意：对任何$x\in X$，有$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，即：$f$将$X$映入$[0, 1]$之中，还要注意：由于对一切$t\in D$都有$F_1\subset G_t$，故按定

义可知 $f[F_1]=\{0\}$；再有由定义直接知道 $f[F_2]=\{1\}$，所以剩下要证明的只是 f 的连续性。

由第七章习题7知道：形如 $[0, a)$ 或 $(b, 1]$ 的区间的逆象如果是 X 中的开集，则 f 连续。我们可以证明：

$$f^{-1}[[0, a)]=\bigcup\{G_t,\ t<a\} \tag{1}$$

$$f^{-1}[(b, 1]]=\bigcup\{\overline{G}_t^c:\ t>b\} \tag{2}$$

就是说两者都是开集的并因而是开集。证明了这点以后定理也就得证。

先证明（1）。设 $x\in f^{-1}[[0, a)]$，则 $f(x)\in[0, a)$，即 $0\leqslant f(x)<a$。由于 D 在 $[0, 1]$ 稠密，故有 $t_x\in D$，使 $f(x)<t_x<a$，换句话说，有 $t_x\in D$ 使

$$f(x)=\inf\{t:\ x\in G_t\}<t_x<a$$

由此可知 $x\in G_{t_x}$，其中 $t_x<a$。因此 $x\in\bigcup\{G_t:\ t<a\}$，这样就证明了：$f^{-1}[[0, a)]$ 中的任何元素也属于 $\bigcup\{G_t:\ t<a\}$。即

$$f^{-1}[[0, a)]\subset\bigcup\{G_t:\ t<a\}。$$

反之，设 $y\in\bigcup\{G_t:\ t<a\}$，则有 $t_y\in D$ 使 $t_y<a$ 及 $y\in G_{t_y}$，因此

$$f(y)=\inf\{t:\ y\in G_t\}\leqslant t_y<a$$

从而 y 也属于 $f^{-1}[[0, a)]$。换句话说，

$$\bigcup\{G_t:\ t<a\}\subset f^{-1}[[0, a)]$$

把以上两种结果合起来就得(1)。

现证(2)。设 $x\in f^{-1}[(b, 1]]$，则 $f(x)\in(b, 1]$，即 $b<f(x)\leqslant 1$。因 D 在 $[0, 1]$ 中稠密，故有 $t_1, t_2\in D$ 使 $b<t_1<t_2<f(x)$，换句话说，

$$f(x)=\inf\{t:\ x\in G_t\}>t_2$$

因此 $x \notin G_{t_2}$，注意由 $t_1 < t_2$ 得 $\bar{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$，故 X 也不属于 $\overline{G_{t_1}}$，因此，$x \in \overline{G^c_{t_1}}$，其中的 $t_1 > b$，由此得

$$x \in \bigcup\{\bar{G}^c_t: t > b\}$$

从而

$$f^{-1}[(b, 1]] \subset \bigcup\{G^c_t: t > b\}。$$

另一方面，设 $y \in \bigcup\{\bar{G}^c_t: t > b\}$，则有 $t_y \in D$ 使 $t_y > b$ 及 $y \in \bar{G}^c_{t_y}$，从而 $y \notin \overline{G_{t_y}}$，但由 $t < t_y$ 得 $G_t \subset G_{t_y} \subset \bar{G}_{t_y}$，故当 $t < t_y$ 时，$y \notin G_t$。

因此

$$f(y) = \inf\{t: y \in G_t\} \geqslant t_y > b$$

从而 $y \in f^{-1}[(b, 1]]$。换句话说，

$$\bigcup\{\bar{G}^c_t: t > b\} \subset f^{-1}[(b, 1]]$$

以上两个结果合起来就得 (2)。

所以 f 是连续的而 Urysohn 引理就得到证明。

16. 求证定理 10.8 (Urysohn 度量化定理) 第二可数正规 T_1 空间 X 是可度量化的（实际上 X 同胚于 $\mathbf{R}^\infty$ 中 Hilbert 立方体 I 的一个子集）。

解：若 X 是有限集，则 X 是离散空间，因此它同胚于 H 中的任何与 X 具有相等点数的子集，若 X 为无限集。因 X 第二可数，故 X 有可列基 $\mathscr{B} = \{G_1, G_2, G_3, \cdots\}$ 其中 $\mathscr{B}$ 的任一元素都不是 X 本身。

由习题 13 可以证明：对于 $\mathscr{B}$ 中的每一个元素 G_i，必有 $\mathscr{B}$ 中的另一元素 G_j 存在，使 $\bar{G}_j \subset G_i$。由所有满足 $\bar{G}_j \subset G_i$ 这种关系的有序偶 $\langle G_j, G_i\rangle$ 所成的组也是可列的，因此，可以把它们排成一列：$p_1, p_2, \cdots$，其中 $p_n = \langle G_{j_n}, G_{i_n}\rangle$。注意：

由$\overline{G}_{j_n}\subset G_{i_n}$得$\overline{G}_{j_n}$与$G_{i_n}^c$是$X$中的互斥闭集，于是由Urysohn引理，有函数$f_n$：$X\to[0,1]$存在，使$f_n[\overline{G}_{j_n}]=\{0\}$及$f_n[G_{i_n}^c]=\{1\}$。

现在定义一个函数f：$X\to I$如下：

$$f(x)=\left\langle\frac{f_1(x)}{2},\ \frac{f_2(x)}{2^2},\ \frac{f_3(x)}{2^3},\ \cdots\right\rangle$$

注意：因$0\leqslant f_n(x)\leqslant 1$对所有$n\in\mathbf{N}$成立，故$\left|\frac{f_n(x)}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$所以$f(x)$确实是Hilbert 立方体$I$中的一点（注意$I=\{\langle a_n\rangle$：$a_n\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}$，$0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n}\}$）。

现在来证明f是一对一的。为此，设x，y为X中两个不同的点。因X是T_1空间，故基$\mathscr{B}$中有元素G_i使$x\in G_i$，但$y\notin G_i$。由本章习题13可知，有有序偶$P_m=\langle G_j, G_i\rangle$存在使$x\in\overline{G}_j\subset G_i$。于是由$f_m(x)$的定义可知：因$x\in\overline{G}_j$，故$f_m(x)=0$；因$y\notin G_i$，故$f_m(y)=1$，即$y\in G_i^c$。因此$f(x)\neq f(y)$（这是因为它们的第$m$个坐标不同）这就证明了$f$是一对一的。

现在来证明f是连续的。设已给$\varepsilon>0$，若有$p\in X$的开邻域G存在，使对任何$x\in G$都有$\|f(x)-f(p)\|<\varepsilon$或即$\|f(x)-f(p)\|^2<\varepsilon^2$，则$f$在$p$连续。

注意 $$\|f(x)-f(p)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n(x)-f_n(p)|^2}{2^{2n}}$$

另外，由于f_n的值总落在$[0,1]$之中，所以$\frac{|f_n(x)-f_n(p)|^2}{2^{2n}}\leqslant\frac{1}{2^{2n}}$。注意$\sum_n\frac{1}{2^{2n}}$收敛，所以有$n_0=n_0(\varepsilon)$，它不依赖于$x$与$p$，能使

$$\|f(x)-f(p)\|^2=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{|f_n(x)-f_n(p)|^2}{2^{2n}}+\frac{\varepsilon^2}{2}$$

现在由于每个函数 $f_n: X\to[0, 1]$ 是连续的，因此有 p 点的开邻域 G_n 存在，使当 $x\in G_n$ 时有 $|f_n(x)-f_n(p)|^2<\frac{\varepsilon^2}{2n_0}$。若令 $G=G_1\cap\cdots\cap G_{n_0}$，$G$ 是 p 点的开邻域的有限交，因而 G 也是 p 点的一个开邻域。而且若 $x\in G$，则

$$\|f(x)-f(p)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n(x)-f_n(p)|^2}{2^{2n}}<n_0\left(\frac{\varepsilon^2}{2n_0}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}=\varepsilon^2$$

这就证明了 f 的连续性。

令 Y 表示 f 的值域，即 $Y=f[X]\subset I$。我们还要证明 $f^{-1}: Y\to X$ 也是连续的。为此，首先注意 Y 上的连续性和序列连续性是等价的（见定理 9.1），因此，对于 $f(p)\in Y$ 来说，若当任何序列 $\langle f(y_n)\rangle$ 收敛于 $f(p)$ 时，就有序列 $\langle y_n\rangle$ 收敛于 p，则 f^{-1} 就在 $f(p)$ 连续。

现在用反证法来证明 f^{-1} 的连续性。设 f^{-1} 不连续，即：设 $\langle f(y_n)\rangle$ 收敛于 $f(p)$，而 $\langle y_n\rangle$ 不收敛于 p。则有 p 的一个开邻域 G，使 G 不含 $\langle y_n\rangle$ 的无限多项。于是就可以由 $\langle y_n\rangle$ 取出一个子序列 $\langle x_n\rangle$，使 $\langle x_n\rangle$ 所有的项都落在 G 外。而因 $p\in G$，故基 $\mathscr{B}$ 中有一个集 G_i 使得 $p\in G_i\subset G$。另外由习题 13 知，有一有序偶 $P_m=\langle G_j, G_i\rangle$ 使 $p\in\overline{G}_j\subset G_i\subset G$。注意因为对所有的 $n\in\mathbf{N}$ 都有 $x_n\notin G$，从而 $x_n\in G_i^c$，于是 $f_m(p)=0$，$f_m(x_n)=1$，则 $|f_m(x_n)-f_m(p)|^2=1$ 并且

$$\|f(x_n)-f(p)\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f_k(x_n)-f_k(p)|^2}{2^{2k}}\geqslant\frac{1}{2^{2m}}$$

亦即
$$\|f(x_n)-f(p)\|\geqslant\frac{1}{2^m}$$

对每个 $n\in\mathbf{N}$ 成立。

因而序列 $\langle f(x_n)\rangle$ 不收敛于 $f(p)$，但这和假设是矛盾的。这说明了 f^{-1} 的连续性。

因而 f 是一个同胚，X 同胚于 Hilbert 立方体的一个子集，从而证明了 X 是可度量化的。

正则与完全正则空间(regular and completely regular spaces)

17．求证命题 10.10：完全正则空间 X 也是正则的。

解：设 F 为 X 中的闭集，又设 $p\in X$ 而不属于 F。由 X 的完全正则性，有连续函数 $f: X\to[0, 1]$ 存在，使 $f(p)=0$，$f[F]=\{1\}$。但 $\mathbf{R}$ 及其子空间 $[0, 1]$ 是 Hausdorff 空间，因此有互斥开集 G 与 H 分别含 0 与 1。于是它们的逆 $f^{-1}[G]$ 与 $f^{-1}[H]$ 是互斥的，开的，并分别包含 p 点与集 F，换句话说，X 也是正则的。

18．求证定理 10.11：在完全正则 T_1 空间 X 上的一切实值连续函数所成的组 $C(X, \mathbf{R})$ 是将点隔离的。

解：设 a 与 b 为 X 中两个不同的点。因 X 是 T_1 空间，故 $\{b\}$ 为闭集，又因 a, b 不同，故 $a\notin\{b\}$。于是由 X 的完全正则性可知：有 X 上的实值连续函数 f 存在使 $f(a)=0$，$f[\{b\}]=1$，从而得到 $f(a)\neq f(b)$。

19．设 (Y, τ_Y) 是 (X, τ) 的子空间，又设 $p\in Y$ 及 $A\subset Y\subset X$，求证：若 p 不属于 A 的 τ_Y 闭包，则 p 也不属于 A 的 τ 闭包 $\overline{A}$。

解：由子空间的性质(见第五章习题 89)，易证：A 的 τ_Y 闭包 $=Y\cap\overline{A}$。但 $p\in Y$ 而 $p\notin A$ 的 τ_Y 闭包，因此 $p\notin\overline{A}$。(注意：由此特别可知：若 F 是 Y 的 τ_Y 闭子集，而 $p\notin F$，

则 $p\notin\overline{F}$)。

20. 求证："是正则空间"这个性质是可遗传的。即：正则空间的子空间是正则的。

解：设 (X,τ) 是正则空间，又设 (Y,τ_Y) 是 (X,τ) 的子空间。另外，设 $p\in Y$，又设 F 是 Y 的一个 τ_Y 闭子集使 $p\notin F$。则由习题 19，以 $\overline{F}$ 表示 F 的 τ—闭包时，$p\notin\overline{F}$。按假设，(X,τ) 是正则空间，因此，

$$\text{有 } G,\ H\in\tau \text{ 使 } \overline{F}\subset G,\ p\in H,\ G\cap H=\varnothing$$

但 $Y\cap G$ 及 $Y\cap H$ 是 Y 中的 τ_Y—开集，且

$$F\subset Y,\ F\subset\overline{F}\subset G\Longrightarrow F\subset Y\cap G$$

$$p\in Y,\ p\in H\Longrightarrow p\in Y\cap H$$

$$G\cap H=\varnothing\Longrightarrow(Y\cap G)\cap(Y\cap H)=\varnothing$$

由此可知 (Y,τ_Y) 也是正则空间。

补 充 习 题

T_1-空间

21. 求证作为 T_1-空间是一个拓扑性质。

22. 用反例说明在连续映照下 T_1-空间的象不必是 T_1 的。

23. 设 (X,τ) 是 T_1-空间，又设 $\tau\lesssim\tau^*$，求证 (X,τ^*) 也是 T_1-空间。

24. 求证 X 是 T_1-空间当且仅当每一 $p\in X$ 是所有包含 p 的开集的交，即 $\{p\}=\bigcap\{G;\ G\text{ 开},\ p\in G\}$。

25. 一个拓扑空间 X，如满足下面公理：

[T_0] 对 X 的任一对不同的点，存在一个开集，包含其中

一个点，但不含另一个点；则称为 T_0-空间。

（i）试举一个是 T_0-空间但不是 T_1-空间的例子。

（ii）求证每个 T_1-空间也是 T_0-空间。

26. 设 X 是至少包含两个点的 T_1-空间，求证若 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基，则 $\mathscr{B}\setminus\{X\}$ 也是 X 的一个基。

Hausdorff 空间

27. 求证作为 Hausdorff 空间是一个拓扑性质。

28. 设 (X, τ) 是一个 Hausdorff 空间，又设 $\tau\lesssim\tau^*$，求证 (X, τ^*) 也是一个 Hausdorff 空间。

29. 求证若 $a_1, \cdots, a_m$ 是 Hausdorff 空间 X 中不同的点，则存在一个 X 上的二二互斥的开子集组 $\{G_1, \cdots, G_m\}$ 使 $a_1\in G_1, \cdots, a_m\in G_m$。

30. 求证设 X 是一个无限的 Hausdorff 空间，则存在一个无限的二二互斥的开子集组。

31. 求证：设 $f: X\to Y$ 与 $g: X\to Y$ 是从拓扑空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 的连续函数，则 $A=\{x: f(x)=g(x)\}$ 是 X 的一个闭子集。

正规空间

32. 求证作为正规空间是一个拓扑性质。

33. 设 τ 是实直线 $\mathbf{R}$ 上由左闭右开区间 $[a, b)$ 所产生的拓扑，求证 $(\mathbf{R}, \tau)$ 是一个正规空间。

34. 设 τ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上由半开矩形

$$[a, b)\times[c, d)=\{\langle x, y\rangle: a\leqslant x<b, c\leqslant y<d\}$$

所产生的拓扑。而且，设 A 由直线 $Y=\{\langle x, y\rangle: x+y=1\}\subset\mathbf{R}^2$ 上坐标为有理数的点所组成并设 $B=Y\setminus A$。

（i）求证A与B都是$(\mathbf{R}^2, \tau)$的闭子集。

（ii）求证不存在$\mathbf{R}^2$的二二互斥的τ—开子集G与H使$A\subset G$与$B\subset H$，所以$(\mathbf{R}^2, \tau)$不是正规的。

35．设A是正规的T_1-空间的闭子集，求证具有相对拓扑的A也是正规的T_1-空间。

36．设X是一个有序集，又设τ是X上的序拓扑，即τ由具有形式$\{x: x<a\}$与$\{x: x>a\}$的X的子集所产生，求证(X, τ)是一个正规空间。

37．求证：设X是一个正规空间，则X是正则的当且仅当X是完全正则的。

Urysohn 引理

38．求证：若对拓扑空间X的任意两个不交的闭子集F_1与F_2，存在一连续函数$f: X\to[0, 1]$使$f[F_1]=\{0\}$及$f[F_2]=\{1\}$，则X是一个正规空间（注意：这是 Urysohn 引理的逆命题）。

39．求证 Urysohn 引理的如下推广：设F_1与F_2是正规空间X的不交的闭子集，则存在一个连续函数$f: X\to[a,b]$使$f[F_1]=\{a\}$，$f[F_2]=\{b\}$。

40．求证 Tietze 扩张定理：设F是正规空间X的一个闭子集，又设$f: F\to[a, b]$是一个实连续函数，则f有一个连续扩张$f^*: X\to[a, b]$。

41．利用 Tietze 扩张定理证明 Urysohn 引理。

正则和完全正则空间

42．求证作为正则空间是一个拓扑性质。

43．求证作为完全正则空间是一个拓扑性质。

44. 求证使成为完全正则空间的性质是可遗传的，即完全正则空间的每一子空间也是完全正则的。

45. 求证：设X是正则的 Lindelöf 空间，则X是正规的。

补充习题答案

25. (i) 令 $X=\{a, b\}$ 及 $\tau=\{X, \{a\}, \varnothing\}$。

第十一章 紧 致 性

复盖（Covers）

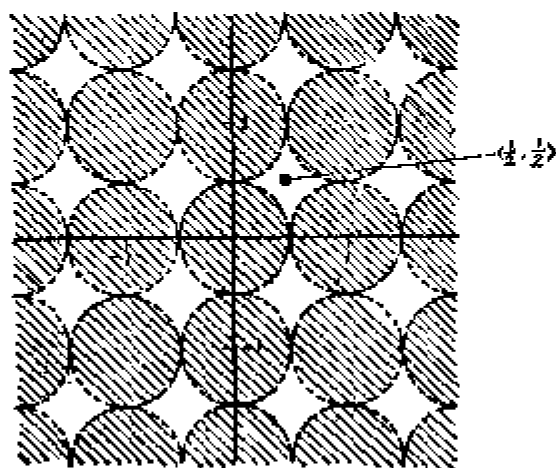
设 $\mathscr{A}=\{G_i\}$ 是X的一个子集组；对于某个 $A\subset X$，有 $A\subset\bigcup_i G_i$，前面已述称 $\mathscr{A}$ 为 A 的一个**复盖** (cover)；若每个 G_i 都是开集，则称 $\mathscr{A}$ 为 A 的一个 **开 复 盖** (opencover)。此外，如果 $\mathscr{A}$ 的某个有限子组就复盖 A，即：若有

$$G_{i_1},\ \cdots,\ G_{i_m}\in\mathscr{A}\quad 使\quad A\subset G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{i_m}$$

则称 $\mathscr{A}$ 可**简化为一个有限复盖**(reducible to a finite cover)，或称 $\mathscr{A}$ 含有一个**有限子复盖**(finite subcover)。

例 1.1 考察集组 $\mathscr{A}=\{D_p:\ p\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$，其中 D_p 表示以平面 $\mathbf{R}^2$ 内 $p=\langle m,\ n\rangle$ 为中心，1 为半径的开盘，而 m，n 都是整数，则 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个复盖，即 $\mathbf{R}^2$ 内每一点至少属于 $\mathscr{A}$ 中的一个开盘。另一方面，开盘组

$\mathscr{B}=\{D_p^*:\ p\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$（其中 D_p^* 表示以 $p=\langle m,\ n\rangle$ 为中心，$\frac{1}{2}$ 为半径的开盘）不是 $\mathbf{R}^2$ 的一个复盖，例如 $\langle\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\rangle\in\mathbf{R}^2$ 不属 $\mathscr{B}$ 中的任何开盘，如右图所示。



例 1.2 考察经典的 Heine-Borel 定理：设 $[a, b]=A$ 是有界闭区间，又设 $\{G_i\}$ 为一个开集组，使 $A\subset\bigcup_i G_i$；则可从开集组 $\{G_i\}$ 中选出有限个开集，譬如说：$G_{i_1}, \cdots, G_{i_m}$，使 $A\subset G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup\cdots\cup G_{i_m}$。用上面的术语，Heine-Borel 定理可以重新叙述如下：

Heine-Borel 定理：有界闭区间 $[a, b]=A$ 的任何开复盖都可以简化为一个有限复盖。

紧致集（Compact sets）

紧致性 (compactness) 概念无疑是由古典的 Heine-Borel 定理中所说的有界闭区间所具备的性质演化出来的。

定义 拓扑空间 X 的子集 A 称为一个**紧致集** (compactset) 是指 A 具备如下性质：A 的任何开复盖都可以简化为一个有限复盖。

换句话说，若 A 为紧致集且 $A\subset\bigcup_i G_i$，其中 G_i 是开集组，则可从 $\{G_i\}$ 中选出有限个开集，譬如说 $G_{i_1}, \cdots, G_{i_m}$，使 $A\subset G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{i_m}$。

例 2.1 由 Heine-Borel 定理可知：实直线 **R** 上任何有界闭区间都是紧致集。

例 2.2 设 A 是拓扑空间 X 中的任一有限集，譬如说 $A=\{a_1, \cdots, a_m\}$，则 A 必然是紧致的。因设 $\mathscr{G}=\{G_i\}$ 是 A 的一个开复盖，则 A 中每个点必属于 $\mathscr{G}$ 中的某个集，譬如说 $a_1\in G_{i_1}, \cdots, a_n\in G_{i_m}$，因此 $A\subset G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup\cdots\cup G_{i_m}$。

因为集 A 为紧致，当且仅当 A 的任何开复盖含有有限子复盖，所以为了证明集 A 不紧致，只须指出 A 的某个开复盖没有有限子复盖就可以了。

例 2.3 在实直线 **R** 上赋以通常拓扑，则开区间

$$(0, 1)=A$$

是不紧致的。例如考察开区间组

$$\mathscr{G}=\left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right), \cdots\right\}$$

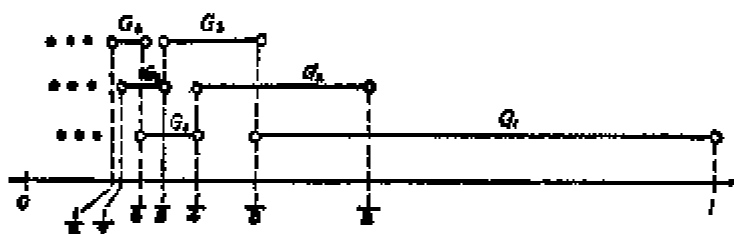
注意：$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$，其中$G_n=\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$，因此$\mathscr{G}$是$A$的一个开复盖，但$\mathscr{G}$不含有限子复盖。因为令

$$\mathscr{G}^*=\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_m, b_m)\}。$$

为$\mathscr{G}$的任一有限子组，设$\varepsilon=\min(a_1, \cdots, a_m)$，则$\varepsilon>0$，且

$$(a_1, b_1)\cup\cdots\cup(a_m, b_m)\subset(\varepsilon, 1)。$$

但$(0, \varepsilon]$和$(\varepsilon, 1]$是互斥的，这说明$\mathscr{G}^*$不是A的复盖，所以A是不紧致的。



例 2.4 我们来证：紧致集的连续映象也是紧致的，即：若$f: X\to Y$是连续函数，A是X中的紧致集，则A的象$f[A]$是Y中的紧致集。为此，设$\mathscr{G}=\{G_i\}$是$f[A]$的一个开复盖，即$f[A]\subset\bigcup_i G_i$，则

$$A\subset f^{-1}[f[A]]\subset f^{-1}[\bigcup_i G_i]=\bigcup_i f^{-1}[G_i]$$

因此$\mathscr{H}=\{f^{-1}[G_i]\}$是$A$的一个复盖。现在$f$是连续的和每个$G_i$是一个开集，故每个$f^{-1}[G_i]$也是开集。换句话说$\mathscr{H}$是$A$的一个开复盖，但$A$为紧致，故$\mathscr{H}$可简化为一个有限复盖，譬如说

$$A\subset f^{-1}[G_{i_1}]\cup\cdots\cup f^{-1}[G_{i_m}]$$

因此

$$f[A]\subset f[f^{-1}[G_{i_1}]\cup\cdots\cup f^{-1}[G_{i_m}]]$$
$$=G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{i_m}$$

这证明 $f[A]$ 是紧致集。

例 2.4 的结果写成定理的形式如下：

定理 11.1 紧致集的连续映象是紧致集。

紧致性是集的一个**绝对性质** (absolute property)。即：

定理 11.2 设 A 为拓扑空间 (X, τ) 的一个子集，则 A 关于 τ 为紧致集的充要条件是 A 关于 A 上的相对拓扑 τ_A 是紧致的。

一个拓扑空间若本身具备紧致性，则称为一个**紧致空间** (compact space)。由于上述定理的缘故，我们对紧致性的讨论可限于在紧致空间中进行。

紧致空间的子集 (Subsets of compact spaces)

紧致空间的子集不必然是紧致的。例如由 Heine-Borel 定理，$[0, 1]$ 是紧致空间；但 $[0, 1]$ 的子集 $(0, 1)$ 是不紧致的（见例 2.3)。然而有下面的定理：

定理 11.3 紧致空间 X 中的闭集 F 也是紧致的。

证明：设 $\mathscr{G}=\{G_i\}$ 是 F 的一个开复盖，即 $F\subset\bigcup_i G_i$，则 $X=(\bigcup_i G_i)\cup F^c$，就是说 $\mathscr{G}^*=\{G_i\}\cup\{F^c\}$ 是 X 的一个复盖，但 F^c 是开集因为 F 是闭集，所以 $\mathscr{G}^*$ 是 X 的一个开复盖。由假设，X 是紧致空间，因此 $\mathscr{G}^*$ 可简化为有限复盖，譬如说

$$X=G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{i_m}\cup F^c，\text{其中 } G_{i_k}\in\mathscr{G}。$$

但 F 与 F^c 是互斥的，故

$$F \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}, \quad G_{i_k} \in \mathscr{G}。$$

这样就证明了F的任何开复盖 $\mathscr{G}=\{G_i\}$ 含一有限子复盖，即F是紧致的。

有限交性（Finite Intersection property）

集组$\{A_i\}$称为具有**有限交性**(finite intersection property)是指：它的任何有限子组 $\{A_{i_1}, \cdots, A_{i_m}\}$ 都有非空的交，即

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m} \neq \varnothing。$$

例 3.1 考察下面的开区间组：

$$\mathscr{A}=\left\{(0,1),\left(0,\ \frac{1}{2}\right),\left(0,\ \frac{1}{3}\right),\left(0,\ \frac{1}{4}\right),\ \cdots\right\}$$

$\mathscr{A}$ 具有有限交性，因任取其中m个区间

$(0, a_1), \cdots, (0, a_m)$，令 $b=\min(a_1, \cdots, a_m)>0$

则

$$(0, a_1) \cap (0, a_2) \cap \cdots \cap (0, a_m)=(0, b)$$

注意：$\mathscr{A}$ 本身之交为空集（$\mathscr{A}$ 中一切集之交是空集）。

例 3.2 考察下面的无界闭区间组

$\mathscr{B}=\{\cdots, (-\infty, -2], (-\infty, -1], (-\infty, 0],$
$(-\infty, 1], (-\infty, 2], \cdots\}$

注意 $\mathscr{B}$ 本身之交（即 $\mathscr{B}$ 中一切集之交）为空集，即

$$\cap\{B_n:\ n \in \mathbf{Z}\}=\varnothing，其中 B_n=(-\infty, n]。$$

但 $\mathscr{B}$ 的任何有限子组有非空的交。换句话说，$\mathscr{B}$ 满足有限交性。

利用有限交性这个术语，可以用拓扑空间的闭集组来刻划紧致性如下：

定理 11.4 拓扑空间X为紧致空间，当且仅当X中任何具有有限交性的闭集组 $\{F_i\}$ 本身之交非空。

紧致性与 Hausdorff 空间（Compactness and Hausdorff spaces）

这里将讨论紧致性与 Hausdorff 空间的隔离性之间的关系。

定理 11.5 Hausdorff 空间中每个紧致集都是闭集。

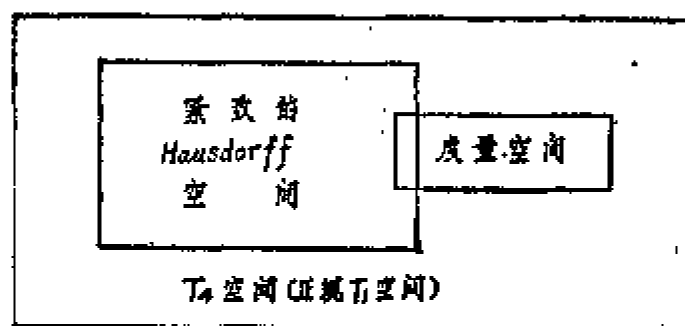
上述定理在一般情况下是不正确的，例如，任何拓扑空间的有限集都是紧致集，但有这样的拓扑空间存在，它的有限集并不都是闭的。

定理 11.6 设A与B为 Hausdorff 空间X中的互斥紧致集，则有互斥的开集G与H存在，使 $A\subset G$, $B\subset H$。

特别，设X既是 Hausdorff 空间又是紧致空间，而 F_1 与 F_2 是X的互斥闭子集，则由定理 11.3，F_1 及 F_2 是紧致的，且由定理 11.6，F_1 及 F_2 分别为互斥开集的子集。换句话说有下面的推论。

推论 11.7 紧致的 Hausdorff 空间是正规空间。

于是度量空间和紧致 Hausdorff 空间都包含在 T_4 空间类中，即正规 T_1 空间类中，如下图所示。



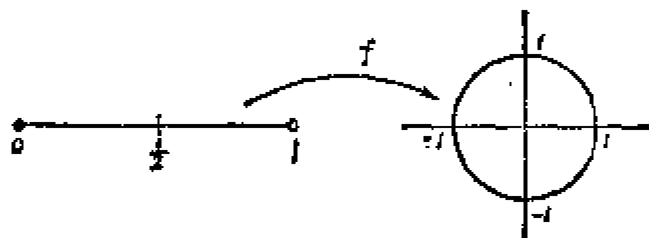
下述定理在几何学中起着非常重要的作用。

定理 11.8 设f是由紧致空间X到 Hausdorff 空间Y的一

个 1—1 连续函数，则X与 $f[X]$ 是同胚的。

下面的例子说明上述定理在条件更一般的情况下是不成立的。

例 4.1 设f是由$f(t)=\langle\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\rangle$所定义的由半开区间 $X=[0, 1)$ 到平面 $\mathbf{R}^2$ 上的函数，则f将X映照到单位圆上，并且f是 1—1 与连续的。



但半开区间 $[0, 1)$并不同胚于圆，因为例如从X中去掉一点 $t=\frac{1}{2}$，则$X\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$不是连通集，而从圆周去掉一点所得点集却仍是连通的。

定理 11.8 在这里不适用的原因是X不是紧致的。

例 4.2 设f是由闭区间 $I=[0, 1]$ 到n维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的 1—1 连续函数，则由 Heine-Borel 定理知：I是紧致的，而 $\mathbf{R}^n$ 是度量空间，因而是 Hausdorff 空间，于是由定理 11.8，I与 $f[I]$ 是同胚的。

列紧集（Sequentially compact sets）

拓扑空间X的子集A称为**列紧** (sequentially compact) 是指：A中的任何序列必含一个收敛于A中一点的子列。

例 5.1 设A为拓扑空间X的有限子集，则A必然是列紧。因为若 $\langle s_1, s_2, \cdots\rangle$ 是A中的一个序列，则其中至少有一点，譬如说 $a_0\in A$，必在序列中出现无限多次。因此 $\langle a_0, a_0, a_0, \cdots\rangle$ 是 $\langle s_n\rangle$ 的一个收敛子列，并且它收敛于

$a_0 \in A$。

例 5.2 对实直线**R**赋以通常拓扑，则开区间 $A=(0, 1)$ 不是列紧的。例如考察A中的序列

$$\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \rangle = \langle s_n \rangle,$$

这个序列收敛于 0，因此任何子序列也收敛于 0，但 $0 \notin A$。换句话说，A 中的序列 $\langle s_n \rangle$ 不含有收敛于 A 中之点的子列。即 A 不是列紧的。

一般来说，存在紧致集而它并不列紧，反之亦然。然而在度量空间中，我们在后面就将证明，紧致集与列紧集是等价的。

注意 在历史上，曾用"双紧致"(bicompact)这个术语来表示紧致，而用"紧致"这个术语来表示列紧。

可数紧致集(Countably compact sets)

拓扑空间X的子集A称为**可数紧致**(countably compact)是指：A的任何无限子集B都有一个在A中的聚点。这个概念当然是由古典的 Bolzano-Weierstrass 定理演化出来的：

Bolzano-Weierstrass 定理 任何有界的无限实数集都有聚点。

例 6.1 任何有界闭区间 $A=[a, b]$ 都是可数紧致。因为若B是A的无限子集，则B是有界的无限集，于是由 Bolzano-Weierstrass 定理，B 有聚点 p，因A是闭集，故B的聚点p含在A中，即A是可数紧致的。

例 6.2 开区间 $A=(0, 1)$ 不是可数紧致。为证明这点考察 $A=(0, 1)$ 的无限子集 $B=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$，注意$B$

只有一个聚点 0，而 0 不含在 A 中，故 A 不是可数紧致。

紧致、列紧与可数紧致之间的关系如下图及下述定理所示：

紧致⟶可数紧致⟵列紧

定理 11.9 设 A 为拓扑空间 X 的子集，则当 A 是紧致或列紧时，A 必是可数紧致的。

下面的例子说明，上图中的箭头都是不可逆的。

例 6.3 设 τ 为正整数集 $\mathbf{N}$ 上由下列集组

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \cdots$$

所产生的拓扑。又设 A 是 $\mathbf{N}$ 的非空子集，譬如说 $n_0 \in A$。若 n_0 是奇数，则 n_0+1 是 A 的一个极限点；若 n_0 是偶数，则 n_0-1 是 A 的一个极限点。在两种情况下，A 都含有极限点，故 $(\mathbf{N}, \tau)$ 是可数紧致。

另一方面，$(\mathbf{N}, \tau)$ 不是紧致的，因为

$$\mathscr{A}=\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \cdots\}$$

是 $\mathbf{N}$ 的一个开复盖而没有有限子复盖。

此外，$(\mathbf{N}, \tau)$ 也不是列紧的，因为序列 $\langle 1, 2, 3, \cdots\rangle$ 不含收敛的子列。

局部紧致空间 (Locally compact spaces)

拓扑空间 X 称为**局部紧致** (locally compact)，是指：X 中的每一点都有一个紧致的邻域。

例 7.1 考察赋以通常拓扑的实直线 $\mathbf{R}$。注意每点 $p\in\mathbf{R}$ 都是一个闭区间例如 $[p-\delta, p+\delta]$ 的内点，而按 Heine-Borel 定理，这闭区间是紧致集，因此 $\mathbf{R}$ 是局部紧致空间。另一方面，$\mathbf{R}$ 不是紧致空间，例如集组：

$$\mathscr{A}=\{\cdots, (-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), \cdots\}$$

是 R 的一个开复盖但没有有限子复盖。

于是从这个例子看到：局部紧致空间可以不是紧致的。但是另一方面，因为拓扑空间总是它每一点的一个邻域，其逆是正确的，即：

命题 11.10 任何紧致空间都是局部紧致的。

紧致化（Compactification）

拓扑空间X称为**被嵌入**（embedded）在拓扑空间Y中是指：X与Y的一个子空间同胚。其次，若Y是一个紧致空间，则称Y为X的一个**紧致化**（compactification）。X的紧致化常常是通过下面的步骤来完成的：在X中添加一个点或多个点，然后在这个扩大了的集上引入适当的拓扑，使这扩大了的空间成为紧致空间，并使X成为它的一个子空间。

例 8.1 考察实直线 $\mathbf{R}$，在其上赋以通常拓扑 $\mathscr{U}$，设对 $\mathbf{R}$ 添加两个新的点，分别用∞与$-\infty$来表示，这个扩大了的集 $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cup\{-\infty,\infty\}$称为**扩张实直线**(extended real line)。$\mathbf{R}$ 中的序关系可以推广到 $\mathbf{R}^*$ 上，只须规定$-\infty<a<\infty$对任何 $a\in\mathbf{R}$ 成立，$\mathbf{R}^*$ 中如下列形式的集组：

$$(a,\ b)=\{x:\ a<x<b\}$$

$$(a,\ \infty]=\{x:\ a<x\}\text{及}$$

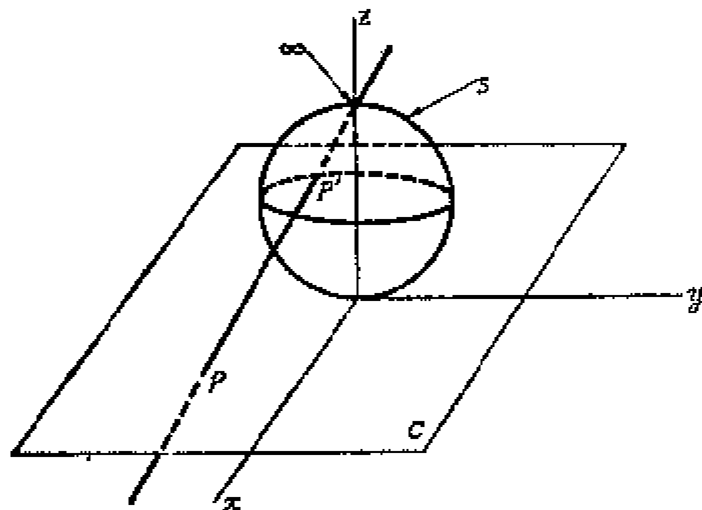
$$[-\infty,\ a)=\{x: x<a\}$$

构成 $\mathbf{R}^*$ 上一种拓扑 $\mathscr{U}^*$ 的一个基。其次，这个拓扑空间($\mathbf{R}^*$, $\mathscr{U}^*$)是个紧致空间，含($\mathbf{R}$, $\mathscr{U}$)作为它的一个子空间，因此它是($\mathbf{R}$, $\mathscr{U}$)的一种紧致化。

注意：在实直线 R 上赋以通常拓扑，则它和任何实数的开区间(a,b)是同胚的。实际上可以证明，上述拓扑空间($\mathbf{R}^*$, $\mathscr{U}^*$)同胚于任何闭区间$[a,b]$，而根据古典的 Heine-

Borel 定理，后者是紧致的。

例 8.2 令 C 表示三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中 $\langle x, y\rangle$ 平面，S 表示以 Z 轴上的点 (0, 0, 1) 为中心，以 1 为半径的球（见附图），则联结"北极" $\infty=\langle 0, 0, 2\rangle\in S$ 及 C 上任一点 p 的



直线与 S 恰好相交于一点 p'，而且 $p'\neq\infty$（如附图所示），现在令映照 f: $C\to S$ 由下式定义：$f(p)=p'$，则 f 实际上是平面 C 到球 S 的子集 $S\setminus\{\infty\}$ 的一个同胚映照。C 不紧致，而 S 是紧致的，所以 S 是 C 的一个紧致化。

现在设(X, τ)为任一拓扑空间，我们将要定义 (X, τ) 的**一点紧致化** (one-point compactification) 或称为 (X, τ) 的 **Alexandrov 紧致化** (Alexandrov compactification)，用 (X_∞, τ_∞)表示。在这里：

(1) $X_\infty=X\cup\{\infty\}$，其中 ∞ 称为**无穷远点** (point at infinity)，它和 X 中任何其他的点都不相同。

(2) τ_∞ 由下列这种集构成：

(i) X 上的拓扑 τ 中的每个集；

(ii) X 的任何闭紧致子集在 X_∞ 中的余集。

我们将上述结论写成下面的命题：

命题 11.11 上述的集组 τ_∞ 是 X_∞ 上的一个拓扑，且 (X_∞, τ_∞) 是 (X, τ) 的一个紧致化。

一般来说，空间 (X_∞, τ_∞) 可以不具备类似于原来空间的那些性质，然而在两个空间之间有着一个重要的关系。即：

定理 11.12 若 (X, τ) 是局部紧致的 Hausdorff 空间，则 (X_∞, τ_∞) 是紧致的 Hausdorff 空间。

由于紧致 Hausdorff 空间是正规 T_1 空间，所以由上述定理及 Urysohn 引理可得下面的推论。

推论 11.13 局部紧致 Hausdorff 空间可嵌入到一个正规 T_1 空间中，并因此是可以度量化的。

度量空间中的紧致性（Compactness in metric spaces）

关于度量空间中的紧致性可以总结在下述的定理中。

定理 11.14 若 A 是度量空间 X 中的一个子集，则下列命题等价：

(i) A 是紧致的，(ii) A 是可数紧致的，(iii) A 是列紧的。

在历史上，是先研究度量空间然后研究拓扑空间的。主要就是由于上述的定理，所以以往常常把紧致和列紧作为同义语来使用。

为了证明上述定理，需要先引入两个辅助的度量概念，即：**完全有界集**（totally bounded set）与一个复盖的 **Lebesgue 数**（lebesgue number），这两个概念也有它们本身的重要意义。

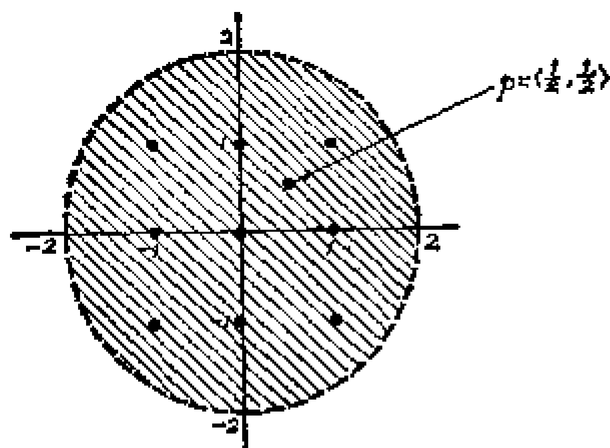
完全有界集（Totally bounded sets）

设A为度量空间X的一个子集，又设$\varepsilon>0$，$N=\{e_1, e_2, \cdots e_m\}$是$A$中的有限集。若对于每一点$p\in A$，有$e_{i_0}\in N$存在使$d(p, e_{i_0})<\varepsilon$，则$N$称为$A$的一个$\varepsilon$ **网**（ε-net）。

例 9.1 设$A=\{\langle x, y\rangle: x^2+y^2<4\}$即：$A$是以原点为中心，半径长等于2的开圆盘，若$\varepsilon=3/2$，则集

$$N=\{\langle 1, -1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 0, -1\rangle, \langle 0, 0\rangle \\ \langle 0, 1\rangle, \langle -1, -1\rangle, \langle -1, 0\rangle, \langle -1, 1\rangle\}$$

是A的一个ε网。另一方面，若$\varepsilon=1/2$，则N就不是A的一个ε网。例如$p=\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$属于$A$，但$p$同$N$中每点的距离都大于1/2。



注意：所谓A的**直径**（diameter）$d(A)$定义如下：

$$d(A)=\sup\{d(a, a'): a, a'\in A\};$$

若$d(A)<\infty$，则称A为有界集。

定义 设A为度量空间X的一个子集，若对任何$\varepsilon>0$，A都有一个ε网，则称A为**完全有界**（totally bounded）。

完全有界集的特征也可描述如下：

命题 11.15 集A为完全有界，当且仅当对于任何$\varepsilon>0$，A

可分解为有限个子集，每个子集的直径小于 ε。

我们首先举例说明：有界集可以不是完全有界的。

例 9.2 设 A 为 Hilbert 空间（即 l_2-空间）中由下列的点所构成的集：

$$e_1=\langle 1,0,0,\cdots\rangle$$
$$e_2=\langle 0,1,0,\cdots\rangle$$
$$e_3=\langle 0,0,1,\cdots\rangle$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

注意当 $i\neq j$ 时 $d(e_i,e_j)=\sqrt{2}$，因此 A 有界，实际上，

$$d(A)=\sup\{d(e_i,e_j);e_i,e_j\in A\}=\sqrt{2}。$$

另一方面 A 却不是完全有界的，因为若令 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则 A 中的非空子集能具有直径 $<\varepsilon$ 的只是单元素集，因此无限集 A 不能分解为有限个子集，使每个子集的直径都小于 $\frac{1}{2}$，所以 A 不是完全有界的。

上述命题的逆命题是成立的，即：

命题 11.16 完全有界集是有界的。

紧致性与完全有界性之间的一个关系如下：

引理 11.17 在度量空间中列紧集是完全有界的*。

复盖的Lebesgue数(Lebesgue numbers for covers)

设 $\mathscr{A}=\{G_i\}$ 为度量空间 X 之子集 A 的一个复盖，若实数 $\delta>0$ 有这样的性质：A 中的任何子集只要其直径 $<\delta$，就为复盖中的某个集所包含，则称此 δ 为复盖 $\mathscr{A}$ 的一个

* 译者注：原文为"列紧集是完全有界的"。

Lebesgue 数(Lebesgue number)。

紧致性与复盖的 Lebesgue 数之间的一个关系如下：

引理 11.18(Lebesgue) 度量空间中列紧集的任何开复盖都有(正的)Lebesgue 数。

习 题 解 答

紧致空间

1．设τ为任一集X的有限余拓扑，求证(X,τ)是紧致空间。

解：设$\mathscr{G}=\{G_i\}$为X的一个开复盖，任取$G_0\in\mathscr{G}$。因τ是有限余拓扑，故G_0^c是有限集，譬如说$G_0^c=\{a_1,\cdots,a_m\}$，因$\mathscr{G}$是X的一个复盖，故对于每个$a_k\in G_0^c$，有$G_{ik}\in\mathscr{G}$，使$a_k\in G_{ik}$。于是$G_0^c\subset G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{im}$，而

$$X=G_0\cup G_0^c=G_0\cup G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{im}$$

所以X是紧致空间。

2．求证：离散拓扑空间X中任何无限子集A都不是紧致的。

解：为了证明A不是紧致的，只须举出A的这样一个开复盖，它没有有限子复盖。

考察A的单元素集所成的集组$\mathscr{A}=\{\{a\}:a\in A\}$。注意：

(i) $\mathscr{A}$是A的一个复盖，实际上$A=\bigcup\{\{a\}:a\in A\}$；

(ii) $\mathscr{A}$是A的一个开复盖，因为离散空间的一切子集都是开集；

(iii) 没有一个$\mathscr{A}$的真子组是A的一个复盖；

(iv) $\mathscr{A}$是无限组，因A是无限集。

从而，A 的开复盖 $\mathscr{A}$ 不含有限子复盖，因此 A 不是紧致集。

由于有限集总是紧致的。我们也就证明了：离散空间的子集为紧致，当且仅当它为有限集。

3. 求证定理 11.2：设 A 为拓扑空间 (X, τ) 的一个子集，则下列命题等价：

（i）A 相对于 τ 是紧致的。

（ii）A 相对于 A 上的相对拓扑 τ_A 是紧致的。

解：(i)$\Longrightarrow$(ii)：设 $\{G_i\}$ 是 A 的一个 τ_A—开复盖，由相对拓扑的定义可知：

有 $H_i\in\tau$ 存在，使 $G_i=A\cap H_i\subset H_i$

故
$$A\subset\bigcup_i G_i\subset\bigcup_i H_i$$
且因此，$\{H_i\}$ 是 A 的一个 τ-开复盖。由 (i)，A 是 τ 紧致集，故 $\{H_i\}$ 含一有限子复盖，譬如说
$$A\subset H_{i_1}\cup\cdots\cup H_{i_m},\ H_{i_k}\in\{H_i\},$$
但由此就得
$$\begin{aligned}A&\subset A\cap(H_{i_1}\cup\cdots\cup H_{i_m})\\&=(A\cap H_{i_1})\cup\cdots\cup(A\cap H_{i_m})\\&=G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{i_m}。\end{aligned}$$
于是 $\{G_i\}$ 含有一个有限子复盖 $\{G_{i_1}, \cdots, G_{i_m}\}$，因此 (A, τ_A)为紧致。

(ii)$\Longrightarrow$(i)：设 $\{H_i\}$ 是 A 的一个τ-开复盖。令
$$G_i=A\cap H_i,$$
则 $A\subset\bigcup_i H_i\Longrightarrow A\subset A\cap(\bigcup_i H_i)=\bigcup_i(A\cap H_i)=\bigcup_i G_i$。
但 $G_i\in\tau_A$，故 $\{G_i\}$ 是 A 的一个 τ_A-开复盖。由假设，A 是 τ_A-紧致集；于是 $\{G_i\}$ 含一有限子复盖 $\{G_{i_1}, \cdots, G_{i_m}\}$。从

而，

$$A \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{im} = (A \cap H_{i_1}) \cup \cdots \cup (A \cap H_{im})$$
$$= A \cap (H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{im}) \subset H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{im}。$$

于是 $\{H_i\}$ 简化为一个有限复盖 $\{H_{i_1}, \cdots, H_{im}\}$，因此$A$关于 τ 是紧致的。

4. 设(Y, τ^*)是(X, τ)的子空间，又设 $A \subset Y \subset X$。求证：A 为 τ 紧致，当且仅当A为 τ^* 紧致。

解：令 τ_A 与 τ^*_A 表示A上的相对拓扑，则由上一习题得：A 是 τ 或 τ^* 紧致，当且仅当A为 τ_A 或 τ^*_A 紧致，但

$$\tau_A = \tau^*_A。$$

5. 求证下列命题等价：

（i）X 是紧致的。

（ii）对于X上的任何闭子集组 $\{F_i\}$ 来说，由$\cap_i F_i = \varnothing$ 可得：$\{F_i\}$ 含一有限子组 $\{F_{i_1}, \cdots, F_{im}\}$，而

$$F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{im} = \varnothing。$$

解：(i)$\Longrightarrow$(ii)：设 $\cap_i F_i = \varnothing$，则由 De Morgan 定律得

$$X = \varnothing^c = (\cap_i F_i)^c = \cup_i F_i^c,$$

故 $\{F_i^c\}$ 是X的一个开复盖，因为每个 F_i 是闭的。但由假设，X 是紧致的；因此

有 $F_{i_1}^c, \cdots, F_{im}^c \in \{F_i^c\}$ 使 $X = F_{i_1}^c \cup \cdots \cup F_{im}^c$，

于是再利用 De Morgan 定律，得

$$\varnothing = X^c = (F_{i_1}^c \cup \cdots \cup F_{im}^c)^c = F_{i_1}^{cc} \cap \cdots \cap F_{im}^{cc}$$
$$= F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{im}$$

(i)$\Longrightarrow$(ii)已得证。

(ii)$\Longrightarrow$(i)：设$\{G_i\}$是X的一个开复盖，即 $X = \cup_i G_i$，

由 De Morgan 定律得，

$$\varnothing = X^c = (\bigcup_i G_i)^c = \bigcap_i G_i^c$$

因为每个 G_i 是开集，故 $\{G_i^c\}$ 是一个闭集组因而如上所述有一个空的交集。所以由假设

有 $G_{i_1}^c, \cdots, G_{im}^c \in \{G_i^c\}$ 使 $G_{i_1}^c \cap \cdots \cap G_{im}^c = \varnothing$

于是再利用 De Morgan 定律，得

$$X = \varnothing^c = (G_{i_1}^c \cap \cdots \cap G_{im}^c)^c = G_{i1}^{cc} \cup \cdots \cup G_{im}^{cc}$$
$$= G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{im}$$

从而X是紧致空间，所以(ii)$\Longrightarrow$(i)。

6．求证定理 11.4：拓扑空间X为紧致空间，当且仅当X中任何具有有限交性的闭子集组 $\{F_i\}$ 本身之交非空。

解：利用上面一题只要证明下列两个命题是等价的，其中 $\{F_i\}$ 是X的任意闭子集组：

（i） $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{im} \neq \varnothing \forall i_1, \cdots, i_m \Longrightarrow \bigcap_i F_i \neq \varnothing$，

（ii） $\bigcap_i F_i = \varnothing \Longrightarrow$ 有$i_1, \cdots, i_m$ s.t. $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{im} = \varnothing$，

但这两个命题是互为逆否命题的。

紧致性与 Hausdorff 空间

7．求证：设A是 Hausdorff 空间X中的紧致子集，又设 $p \in X \setminus A$，则有开集 G, H 使$p \in G$, $A \subset H$, $G \cap H = \varnothing$。

解：设 $a \in A$，因 $p \notin A$ 故 $p \neq a$。由假设，X 是 Hausdorff 空间，因此，

有开集 G_a, H_a 使 $p \in G_a$, $a \in H_a$, $G_a \cap H_a = \varnothing$因此

$$A \subset \bigcup \{H_a;\ a \in A\},$$

即 $\{H_a;\ a \in A\}$ 是A的一个开复盖。但A是紧致的，故

有 $H_{a_1}, \cdots, H_{am} \in \{H_a\}$ 使 $A \subset H_{a_1} \cup \cdots \cup H_{am}$。

现在令 $H=H_{a_1}\cup\cdots\cup H_{am}$ 及 $G=G_{a_1}\cap\cdots\cap G_{am}$，
则H和G都是开集，因为它们分别为有限个开集的并和交。此外有 $A\subset H$ 及 $p\in G$，因为 p 属于每个 G_{ai}。

最后我们来证明 $G\cap H=\varnothing$。首先注意由 $G_{ai}\cap H_{ai}=\varnothing$ 得 $G_{ai}\cap H=\varnothing$，于是由分配律，

$$G\cap H=G\cap(H_{a_1}\cup\cdots\cup H_{am})$$
$$=(G\cap H_{a_1})\cup\cdots\cup(G\cap H_{am})$$
$$=\varnothing\cup\cdots\cup\varnothing=\varnothing$$

于是证明完毕。

8．设A为 Hausdorff 空间X的一个紧致子集，求证：若 $p\notin A$，则有开集G使 $p\in G\subset A^c$。

解：由习题7，有开集G与H使 $p\in G$，$A\subset H$ 及

$$G\cap H=\varnothing。$$

因此，$G\cap A=\varnothing$，从而 $p\in G\subset A^c$。

9．求证定理11.5：设A为 Hausdorff 空间X的一个紧致子集，则A是闭集。

解：我们来证等价命题：A^c是开集。设 $p\in A^c$，即 $p\notin A$。则由习题8，有开集 G_p 存在，使 $p\in G_p\subset A^c$。因此 $A^c=\bigcup\{G_p:\ p\in A^c\}$。

于是 A^c 作为开集之并是开集，或A是闭集。

10．求证定理11.6：设A与B为 Hausdorff 空间X的互斥紧致子集，则有互斥开集G与H使 $A\subset G$ 与 $B\subset H$。

解：设 $a\in A$，则 $a\notin B$，因A与B互斥。由假设，B紧致，故由习题7，有开集 G_a 与 H_a 存在使 $a\in G_a$，$B\subset H_a$ 及 $G_a\cap H_a=\varnothing$。

由于 $a\in G_a$，故 $\{G_a:\ a\in A\}$ 是A的一个开复盖。因

A紧致，故可以选有限个开集，譬如说：G_{a_1}，…，G_{am}使$A\subset G_{a_1}\cup\cdots\cup G_{am}$。此外有$B\subset H_{a_1}\cap\cdots\cap H_{am}$，因$B$是它们中每一个的子集。

现在令$G=G_{a_1}\cup\cdots\cup G_{am}$和$H=H_{a_1}\cap\cdots\cap H_{am}$，注意由上所证，有$A\subset G$及$B\subset H$。另外还有$G$和$H$都是开集，因为它们分别是有限个开集的并和交。若我们证明了G与H是互斥的，则定理已经得证。

首先注意到，对每个i，由$G_{ai}\cap H_{ai}=\varnothing$得$G_{ai}\cap H=\varnothing$。因此由分配律：

$$
\begin{aligned}
G\cap H&=(G_{a_1}\cup\cdots\cup G_{am})\cap H\\
&=(G_{a_1}\cap H)\cup\cdots\cup(G_{am}\cap H)\\
&=\varnothing\cup\cdots\cup\varnothing=\varnothing。
\end{aligned}
$$

于是定理得证。

11．求证定理 11.8：设f为紧致空间X到 Hausdorff 空间Y的 1—1 连续函数，则X与$f[X]$是同胚的。

解：f：$X\to f[X]$是到上的，并且由假设它是 1—1 的与连续的，故f^{-1}：$f[X]\to X$是存在的。要证明的只是f^{-1}是连续的。

为此，注意：若对于X的任何闭集F，$(f^{-1})^{-1}[F]=f[F]$是$f[X]$的一个闭子集，则f^{-1}连续。由定理 11.3，紧致空间X中的闭集F也是紧致的。因f连续，故$f[F]$是$f[X]$的紧致子集，但$f[X]$作为 Hausdorff 空间Y的子空间也是 Hausdorff 空间，因此由定理 11.5，$f[F]$是闭集。这就证明了f^{-1}的连续性。所以f：$X\to f[X]$是同胚映照，而X与$f[X]$同胚。

12．设(X,τ)是紧致空间，(X,τ^*)是 Hausdorff 空



间，求证：若 $\tau^* \subset \tau$，则 $\tau^* = \tau$。

解：考察由 $f(x)=x$ 所定义的函数 $f:(X,\tau)\to(X,\tau^*)$ 即 X 上的恒等函数，则 f 是 1—1 和到上映照。此外因 $\tau^* \subset \tau$，故 f 连续。于是由上一习题，f 是同胚映照，从而 $\tau^* = \tau$。

列紧集与可数紧致集

13．求证：列紧集的连续映象是列紧集。

解：设 f：$X\to Y$ 是连续函数，又设 A 是 X 中的列紧集，我们要证 $f[A]$ 是 Y 中的列紧集。为此，令 $\langle b_1, b_2, \cdots\rangle$ 是 $f[A]$ 中的一个序列，则

$$\text{有 } a_1, a_2, \cdots \in A \quad \text{使} \quad f(a_n) = b_n, \ \forall n \in \mathbf{N}。$$

但 A 是列紧集，因此序列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 含一收敛于 $a_0 \in A$ 的子列 $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots\rangle$，现在 f 是连续的因而是序列连续的。因此

$$\langle f(a_{i_1}), f(a_{i_2}), \cdots\rangle = \langle b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots\rangle$$

收敛于 $f(a_0) \in f[A]$。

这说明 $f[A]$ 是列紧集。

14．设 τ 为 X 上的拓扑，它由 $\varnothing$ 与 X 中的可数集之余集所构成，求证：X 中的任何无限集都不是列紧的。

解：注意（可参阅例题 7.3）：(X,τ) 中的一个序列收敛，当且仅当它具有以下形式：

$$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, p, p, p, \cdots\rangle$$

即它从某一项开始都是常数。因此若 A 是 X 的一个无限子集，A 中有这样的序列 $\langle b_n\rangle$ 存在，它的项两两不同，这样的 $\langle b_n\rangle$ 就不包含任何收敛的子列。这说明 A 不是列紧的。

15．求证：可数紧致集的连续映象是可数紧致集。

解：设 $f: X\to Y$ 是连续函数，又设 S 是 X 中的一个可数紧致集。要证明的是：$T=f[S]$ 是 Y 中的可数紧致集。为此，设 B 为 T 的一个无限子集，则 B 含有可列子集 $D=\{b_1, b_2, \cdots\}$。由于 $D\subset B\subset T=f[S]$，故 S 中有可列子集 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$ 使 $f(a_n)=b_n$ 对每个 $n\in\mathbf{N}$ 成立。由假设 S 是可数紧致的，故 A 含聚点 $p\in S$。因而 $p\in\overline{A}$ 及 $f(p)\in f[S]=T$。又由假设 f 是连续的，故 $f[\overline{A}]\subset\overline{f[A]}=\overline{D}$，但 $p\in\overline{A}$，故 $f(p)\in\overline{D}$。

我们来证明 $f(p)$ 是 D 的一个聚点，有两种情况：

(1) $p\notin A$ 的情况。则 $f(p)\notin f[A]=D$，但 $f(p)\in\overline{D}$，故 $f(p)$ 是 D 的一个聚点。

(2) $p\in A$，譬如说 $p=a_1$ 的情况。则 p 是 $A^*=\{a_2, a_3, \cdots\}$ 的一个聚点。但 $f[A^*]=\{b_2, b_3, \cdots\}$。于是如同情况(1)，$f(p)$ 是 $f[A^*]$ 的一个聚点，而 $f[A^*]$ 是 D 的一个子集，故 $f(p)$ 也是 D 的一个聚点。

注意 D 是 B 的一个子集，因此 $f(p)$ 也是 B 的一个聚点。已知 $f(p)\in f[S]=T$，于是 T 的任何无限子集 B 含一聚点，这个聚点在 T 中，即：T 是可数紧致的。

16. 求证：若 X 紧致，则 X 也是可数紧致。

解：设 A 为 X 中没有属于 X 的聚点的子集，则每点 $p\in X$ 都可以属于某个开集 G_p，而这个 G_p 顶多只含 A 的一个点。注意：这个开集组 $\{G_p: p\in X\}$ 是紧致集 X 的一个开复盖，故它含一个有限子复盖，譬如说含 $\{G_{p_1}, \cdots G_{p_m}\}$。于是 $A\subset X\subset G_{p_1}\cup\cdots\cup G_{p_m}$。

但每个 G_{p_i} 顶多只含 A 中一个点，故 A 作为 $G_{p_1}\cup\cdots\cup G_{p_m}$ 的一个子集顶多只能含有 m 个点，即 A 是有限集。从

而，X 中的任何无限子集必含有在X中的聚点，就是说X是可数紧致的。

17．求证：若X是列紧的，则X也是可数紧致的。

解：设A为X的任意无限子集，则A中有子列$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$，它的项两两不同。因$X$是列紧的，故序列$\langle a_n\rangle$有子列$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots\rangle$（它的项也是两两不同）收敛于一点$p\in X$。因此$p$的任何开邻域都含收敛子列$\langle a_{i_n}\rangle$的无限多项，但这些项是两两不同的，因此$p$的任何开邻域都含有$A$的无限多个点。从而$p\in X$是$A$的一个聚点。换句话说，$X$是可数紧致。

注意：习题16和习题17合起来就是定理11.9。

18．求证：若$A\subset X$是列紧，则A的任何可数开复盖可简化为有限复盖。

解：可假定A是无限集，因为否则证明是显然的。

用反证法：设有可数开复盖$\{G_i: i\in \mathbf{N}\}$存在，它没有有限子复盖。我们确定一个序列如下：

设n_1是使$A\cap G_{n_1}\neq\emptyset$的最小正整数，取$a_1\in A\cap G_{n_1}$。又设$n_2$是大于$n_1$而使$A\cap G_{n_2}\neq\emptyset$的最小正整数，取

$$a_2\in (A\cap G_{n_2})\setminus(A\cap G_{n_1}),$$

这样的点a_2总是存在的，否则G_{n_1}就复盖A了。令这过程继读下去，我们将得到一个序列$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$，它具有以下性质：

$$\text{对于每个 } i\in \mathbf{N},\ a_i\in A\cap G_{n_i},\ a_i\notin\bigcup_{j=1}^{i-1}(A\cap G_{n_j})$$

同时 $n_i>n_{i-1}$。

可以证明：$\langle a_i\rangle$不可能有A中的收敛的子列。为此，设

$p\in A$。则

$$\text{有}\ G_{i_0}\in\{G_i\}\quad\text{使}\quad p\in G_{i_0}。$$

由于 $p\in A\cap G_{i_0}$，故 $A\cap G_{i_0}\neq\varnothing$。因此

$$\text{有}\ j_0\in\mathbf{N}\quad\text{使}\quad G_{nj_0}=G_{i_0}。$$

但由序列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 的选法可知

$$\text{当}\ i>j_0\ \text{时有}\ a_i\notin G_{nj_0}=G_{i_0}。$$

因 G_{i_0} 是含 p 点的一个开集，故没有 $\langle a_i\rangle$ 的子列能收敛于 p，而 p 是 A 中的任意点，这说明 A 不是列紧的。

度量空间中的紧致性

19. 求证引理 11.17：设 A 为度量空间 X 中的一个列紧集；则 A 完全有界。

解：我们将证其逆否命题：若 A 不是完全有界，则 A 不是列紧。

若 A 不是完全有界，则有 $\varepsilon>0$，使 A 没有（有限的）ε 网。设 $a_1\in A$，则必有 $a_2\in A$ 使 $d(a_1, a_2)\geqslant\varepsilon$。因为否则 $\{a_1\}$ 就是 A 的一个 ε 网了。同理，必有 $a_3\in A$ 使

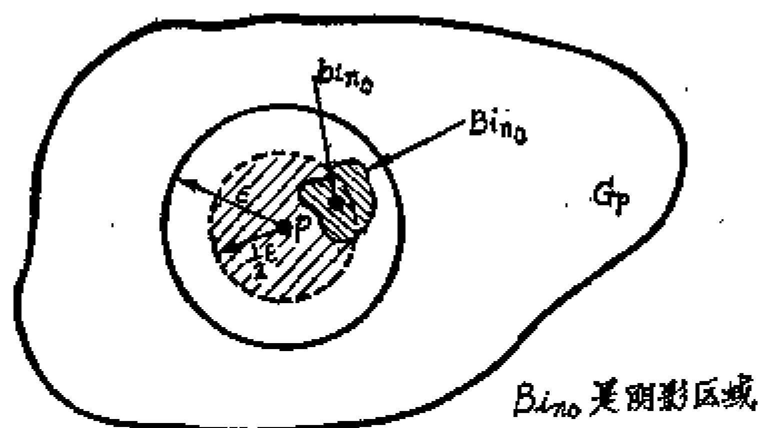
$$d(a_1, a_3)\geqslant\varepsilon,\quad d(a_2, a_3)\geqslant\varepsilon,$$

因为否则 $\{a_1, a_2\}$ 就是 A 的一个 ε 网。继读这个过程，将得到一个序列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$，它有这样的性质：当 $i\neq j$ 时，$d(a_i, a_j)\geqslant\varepsilon$。这样，序列 $\langle a_n\rangle$ 就不可能含有收敛的子列。换句话说，A 不是列紧的。

20. 求证引理 11.18(Lebesgue 引理)：设 $\mathscr{A}=\{G_i\}$ 是列紧集 A 的一个开复盖，则 $\mathscr{A}$ 有(正的) Lebesgue 数。

解：设 $\mathscr{A}$ 没有 Lebesgue 数，则对于每个正整数 $n\in\mathbf{N}$ 有 A 的一个子集 B_n 具备以下性质：

$0<d(B_n)<\frac{1}{n}$ 且 $B_n \not\subset G_i$ 对于 $\mathscr{A}$ 中的每个 G_i 成立。



对每个 $n \in \mathbf{N}$，取一点 $b_n \in B_n$。因 A 列紧，故序列 $\langle b_1, b_2, \cdots\rangle$ 含有一个收敛于点 $p \in A$ 的子列 $\langle b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots\rangle$。

因为 $p \in A$，故 p 属于复盖 $\mathscr{A}$ 中的一个开集 G_p。因此有以 p 为中心，ε 为半径的开球 $S(p, \varepsilon)$ 存在，使 $p \in S(p, \varepsilon) \subset G_p$。因为 $\langle b_{in}\rangle$ 收敛于 p，故

$$\text{有正整数 } i_{n_0} \text{ 使 } \quad d(p, b_{in_0})<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$b_{in_0} \in B_{in_0} \quad \text{及} \quad d(B_{in_0})<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

利用三角不等式，得 $B_{in_0} \subset S(p, \varepsilon) \subset G_p$，但这和 $B_{in_0} \not\subset G_i$ 对于复盖 $\mathscr{A}$ 中的任何 G_i 成立的事实矛盾。从而证明了 $\mathscr{A}$ 是有 Lebesgue 数的。

21．求证：设 A 是度量空间 X 中一个可数紧致集，则 A 也是列紧的。

解：设 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 为 A 中的一个序列，若集 $B=\{a_1, a_2, \cdots\}$ 是有限集，则有一点譬如说 a_{i_0} 满足 $a_{i_0}=a_j$ 对于无限多个 $j \in \mathbf{N}$ 成立。因此 $\langle a_{i_0}, a_{i_0}, \cdots\rangle$ 是 $\langle a_n\rangle$ 的一个子列，

这个子列收敛于A中的点a_{i_0}。

另一方面，设$B=\{a_1, a_2, \cdots\}$是无限集。由假设，A是可数紧致，因此A的无限子集B有聚点p含于A中。但X是度量空间，故可从序列$\langle a_n\rangle$中选出一个子列$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots\rangle$使它收敛于$A$中一点$p$，换句话说，$A$是列紧的。

22. 求证定理 11.14：设A为度量空间X的子集，则下列命题等价：(i) A是紧致的，(ii) A是可数紧致的，(iii) A是列紧的。

解：定理 11.9 已证明了 (i)$\Longrightarrow$(ii) 在任何拓扑空间中成立，因此它对于度量空间亦成立。在上一习题中又证明了(ii)$\Longrightarrow$(iii)。因此只要证明了 (iii)$\Longrightarrow$(i)，整个定理就得到证明。

设A为列紧，又设$\mathscr{A}=\{G_i\}$为A的一个开复盖，要证的是：A是紧致的，即$\mathscr{A}$有有限子复盖。

由假设，因A列紧，故由引理 11.18 知：复盖$\mathscr{A}$有 Lebesgue 数$\delta>0$。另外还有，由引理 11.17 知：A完全有界。因此A可以分解为有限个子集：譬如说$B_1, \cdots B_m$，使$d(B_i)<\delta$。但δ是$\mathscr{A}$的 Lebesgue 数，因此$\mathscr{A}$中有开集$G_{i_1}, \cdots G_{im}$使

$$B_1\subset G_{i_1}, \cdots, B_m\subset G_{im}$$

从而$A\subset B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m\subset G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup\cdots\cup G_{im}$，这就证明了$\mathscr{A}$有有限子复盖$\{G_{i_1}, \cdots, G_{im}\}$，即$A$是紧致的。

23. 设A为度量空间(X, d)的紧致子集，求证：对任何$B\subset X$，有一点$p\in A$，使$d(p, B)=d(A, B)$。

解：设$d(A, B)=\varepsilon$，因

$$d(A, B)=\inf\{d(a, b);\ a\in A, b\in B\},$$

故对任何正整数 $n\in\mathbf{N}$，有 $a_n\in A$，$b_n\in B$，使

$$\varepsilon\leqslant d(a_n, b_n)<\varepsilon+\frac{1}{n}。$$

现因 A 紧致，从而是列紧的，故序列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 有一个子列收敛于一点 $p\in A$。下面来证明：$d(p, B)=d(A, B)=\varepsilon$。

假设 $d(p, B)>\varepsilon$。譬如说 $d(p, B)=\varepsilon+\delta$，其中 $\delta>0$。因 $\langle a_n\rangle$ 的子列收敛于 p，故

$$有\ n_0\in\mathbf{N}\quad 使\ d(p, a_{n_0})<\frac{1}{2}\delta$$

$$及\quad d(a_{n_0}, b_{n_0})<\varepsilon+\frac{1}{n_0}<\varepsilon+\frac{1}{2}\delta$$

则
$$d(p, a_{n_0})+d(a_{n_0}, b_{n_0})<\frac{1}{2}\delta+\varepsilon+\frac{1}{2}\delta=\varepsilon+\delta$$
$$=d(p, B)\leqslant d(p, b_{n_0})$$

这和三角不等式是矛盾的，所以 $d(p, B)=d(A, B)$。

24．设 A 为度量空间 (X, d) 的紧致子集，又设 B 是 X 的一个闭子集使 $A\cap B=\varnothing$。求证：$d(A, B)>0$。

解：假设 $d(A, B)=0$。则由上一习题知：

$$有\ p\in A\quad 使\quad d(p, B)=d(A, B)=0。$$

但 B 是闭集，故 B 含有一切和它距离为零的点，因此 $p\in B$，从而 $p\in A\cap B$。但这和题中的假设矛盾，故 $d(A, B)>0$。

25．求证：设 f 是由紧致度量空间 (X, d) 到度量空间 (Y, d^*) 的连续函数，则 f 为**一致连续**（uniformly continuous）即：任给 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使

$$d(x, y)<\delta\Longrightarrow d^*(f(x), f(y))<\varepsilon。$$

（注意：一致连续性是比连续性更强的条件，在这里上述的 δ 仅与 ε 有关，而不和具体的点有关。）

解：设 $\varepsilon>0$，因 f 连续，故对每一点 $p\in X$，有开球 $S(p, \delta_p)$ 使

$$x\in S(p, \delta_p)\Longrightarrow f(x)\in S(f(p), \frac{1}{2}\varepsilon)。$$

注意：集组 $\mathscr{A}=\{S(p, \delta_p): p\in X\}$ 是 X 的一个开复盖，而由假设，X 为紧致，从而也是列紧，因此复盖 $\mathscr{A}$ 有一 Lebesgue 数 $\delta>0$。

现在，令 $x, y\in X$ 满足 $d(x, y)<\delta$，但由

$$d\{x, y\}=d(x, y)<\delta,$$

得 $\{x, y\}$ 含在复盖 $\mathscr{A}$ 中的一个球 $S(p_0, \delta_{p_0})$ 内。

现在

$$x, y\in S(p_0, \delta_{p_0})\Longrightarrow f(x), f(y)\in S(f(p_0), \frac{1}{2}\varepsilon)。$$

但球 $S(f(p_0), \frac{1}{2}\varepsilon)$ 的直径为 ε，从而

$$d(x, y)<\delta\Longrightarrow d^*(f(x), f(y))<\varepsilon,$$

换句话说 f 是一致连续的。

补 充 习 题

紧致空间

26．求证：若 E 是紧致的，F 是闭的，则 $E\cap F$ 是紧致的。

27．设 $A_1, \cdots, A_m$ 是拓扑空间 X 的紧致集，求证 $A_1\cup\cdots\cup A_m$ 也是紧致的。

28．求证紧致性是一个拓扑性质。

29．求证命题 11.11：集组 τ_∞ 是 X_∞ 上的拓扑且 $(X_\infty,$

τ_∞) 是 (X, τ)的一个紧致化（这里 (X_∞, τ_∞) 是 (X, τ) 的 Alexandrov 一点紧致化）。

30. 求证定理 11.12：若 (X, τ) 是一个局部紧致 Hausdorff 空间，则 (X_∞, τ_∞) 是一个紧致的 Hausdorff 空间。

列紧空间与可数紧致空间

31. 求证列紧性是一个拓扑性质。

32. 求证列紧空间的闭子集是列紧的。

33. 求证可数紧致性是一个拓扑性质。

34. 假设(X, τ)是可数紧致的，$\tau^* \leqslant \tau$，求证 (X, τ^*) 也是可数紧致的。

35. 求证：设X是一个拓扑空间，若X的每个可数开复盖可简化为有限复盖，则X是可数紧致的。

36. 求证：设X是T_1-空间，则X是可数紧致的，当且仅当X的每一可数开复盖可简化为一个有限复盖。

37. 求证：设X是第二可数的T_1-空间，则X是紧致的当且仅当X是可数紧致的。

完全有界集

38. 求证命题 11.15：集合A是完全有界的，当且仅当对每个$\varepsilon>0$存在A的一个分解，把A分解为有限个直径小于ε的集合。

39. 求证命题 11.16：完全有界集是有界的。

40. 求证完全有界集的每一子集是完全有界的。

41. 求证若A是完全有界的，则$\overline{A}$也是完全有界的。

42．求证：每一完全有界的度量空间是可分的。

紧致性与度量空间

43．求证：度量空间X的紧致子集是闭且有界的。

44．求证：设f：$X\to Y$是从紧致空间X到度量空间Y的连续函数，则$f[X]$是Y的有界子集。

45．求证：实直线$\mathbf{R}$的子集A是紧致的当且仅当A是闭且有界的。

46．求证：设A是度量空间X的紧致子集，则A的导集A'也是紧致的。

47．求证：Hilbert 立方体$I=\left\{\langle a_n\rangle:0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n}\right\}$是$\mathbf{R}^\infty$的紧致子集。

48．求证：设A与B是度量空间X的紧致子集，则存在$a\in A$与$b\in B$使$d(a,b)=d(A,B)$。

局部紧致空间

49．求证局部紧致性是一个拓扑性质。

50．求证每个离散空间是局部紧致的。

51．求证每个非离散空间是局部紧致的。

52．求证按通常拓扑平面$\mathbf{R}^2$是局部紧致的。

53．求证：设A是局部紧致空间(X,τ)的一个闭子集，则A赋予相对拓扑是局部紧致的。

第十二章　积　空　间

积拓扑（Product topology）

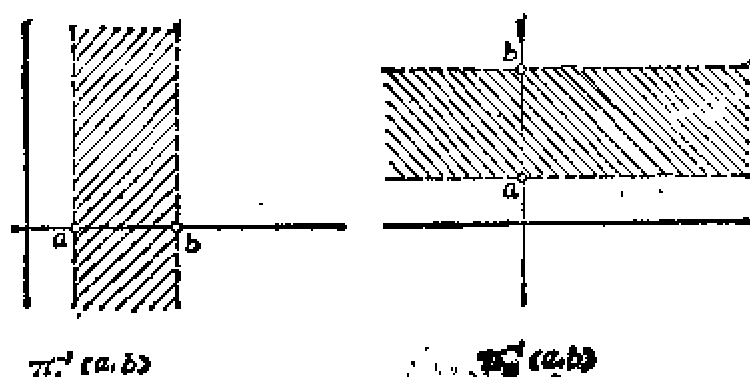
设$\{X_i: i\in I\}$为任一集组，又设X表示这些集的卡氏积(Cartesian product)，即：$X=\prod_i X_i$。注意X是由所有这样的点$p=\langle a_i: i\in I\rangle$所构成，其中$a_i\in X_i$。以前已经学过：对任何$j_0\in I$，由积集$X$到坐标空间$X_{j_0}$的射影$\pi_{j_0}: X\to X_{j_0}$是由下面公式定义的：

$$\pi_{j_0}(\langle a_i: i\in I\rangle)=a_{j_0}$$

这些射影可用来定义积拓扑。

定义　设$\{(X_i, \tau_i)\}$为拓扑空间簇；X为$\{X_i\}$的积集，即$X=\prod_i X_i$。使X上所有的射影$\pi_i: X\to X_i$都成为连续映照的最粗拓扑τ称为**积拓扑**(product topology)或Tychonoff积拓扑，积集X赋以此积拓扑τ时，即(X, τ)，称为**积拓扑空间**(product topological space)或简称为**积空间**(product space)。换句话说，积集$X=\prod_i X_i$上的积拓扑τ是指由上述的射影所产生的拓扑(见第七章)。

例 1.1　考察卡氏平面$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，其逆象$\pi_1^{-1}(a, b)$与$\pi_2^{-1}(a, b)$都是无限开带，这些开带构成$\mathbf{R}^2$上通常拓扑的一个子基。因此$\mathbf{R}^2$上的通常拓扑就是由从$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}$的两个射影所产生的拓扑。

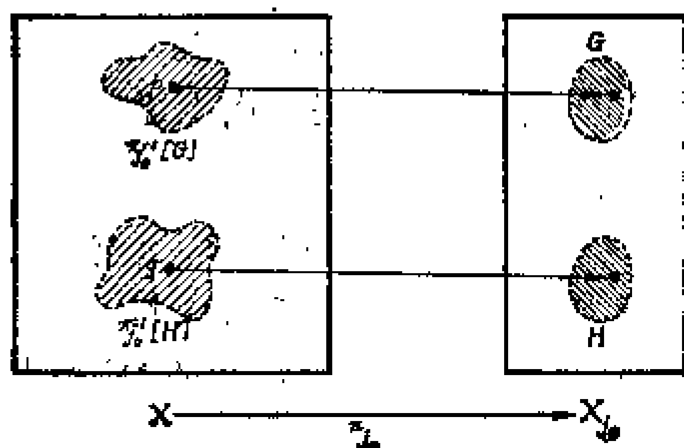


利用上面的定义，可将例 1.1 的结果叙述如下：

定理 12.1 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的通常拓扑是积拓扑。

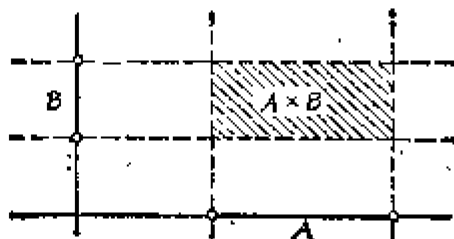
例 1.2 设 $\{X_i: i\in I\}$ 是一簇 Hausdorff 空间，又设 X 是积空间，即 $X=\prod_i X_i$。我们来证明：X 也是一个 Hausdorff 空间。

为此，设 $p=\langle a_i: i\in I\rangle$ 及 $q=\langle b_i: i\in I\rangle$ 是 X 中两个不同的点，则 p 与 q 至少在一个坐标空间譬如说 X_{j_0} 上不相同，即 $a_{j_0}\neq b_{j_0}$。由假设，X_{j_0} 是 Hausdorff 空间，故 X_{j_0} 中有互斥的开集 G 与 H 存在，使 $a_{j_0}\in G$，$b_{j_0}\in H$。由积空间的定义，射影 $\pi_{j_0}: X\to X_{j_0}$ 是连续的，从而 $\pi_{j_0}^{-1}[G]$ 与 $\pi_{j_0}^{-1}[H]$ 是 X 的分别含 p 与 q 的互斥开集。因此，X 也是 Hausdorff 空间。



有限积拓扑的基 (Base for a finite product topology)

两个有限开区间A与B的卡氏积$A\times B$是$\mathbf{R}^2$的一个开矩形，如右图所示。



如前所述，这种开矩形构成$\mathbf{R}^2$上通常拓扑的一个基，所以它也是$\mathbf{R}^2$上的积拓扑。对于有限积拓扑来说，类似的命题也是成立的。即

命题 12.2 设$X_1, \cdots, X_m$为有限个拓扑空间，又设X是积空间，即$X=X_1\times\cdots\times X_m$，则积空间$X$中一切如下述形式的集

$$G_1\times G_2\times\cdots\times G_m,$$

其中G_i是X_i的一个开集，构成X上的积拓扑的一个基。

在下一节中将会看到：对于无限积空间来说，上述命题是不成立的。

积拓扑的定义准基和定义基 (Defining subbase and defining base for the product topology)

设$\{X_i: i\in I\}$是一簇拓扑空间，又设X表示积空间，即$X=\prod_i X_i$，若G_{j_0}是坐标空间X_{j_0}的一个开集，则$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$由X中使得$\pi_{j_0}(p)\in G_{j_0}$成立的一切点$p=\langle a_i: i\in I\rangle$所构成，换句话说，

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]=\prod\{X_i:\ i\neq j_0\}\times G_{j_0}$$

特别是若所给的拓扑空间簇是可列的，譬如说是 $\{X_1, X_2, \cdots\}$，则积空间

$$X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n=X_1\times X_2\times X_3\times\cdots$$

是由形如

$$p=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\rangle,\text{ 其中 } a_n\in X_n$$

的一切序列所构成，并且

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]=X_1\times\cdots\times X_{j_0-1}\times G_{j_0}\times X_{j_0+1}\times\cdots。$$

由定义，X 上的积拓扑是使所有的射影都成为连续映照的最粗拓扑(或称最小拓扑)，也就是由所有这些射影所产生的拓扑。从而，坐标空间中所有开集的逆射影构成积拓扑的一个准基（定理 7.8)，即：

定理 12.3 积空间 $X=\prod_i X_i$ 中形如

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]=\prod\{X_i:\ i\neq j_0\}\times G_{j_0}$$

的一切集所成的集组构成积拓扑的一个准基，其中 G_{j_0} 是坐标空间 X_{j_0} 中的一个开集，这个准基称为积拓扑的**定义准基**(defining subbase)。

另外，由于准基中的集的一切有限交构成拓扑的基，我们得到下面的定理。

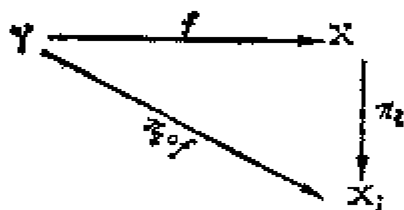
定理 12.4 积空间 $X=\prod_i X_i$ 中一切形如

$$\pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}]\cap\cdots\cap\pi_{j_m}^{-1}[G_{j_m}]=\prod\{X_i:\ i\neq j_1, \cdots, j_m\}\times G_{j_1}\times\cdots\times G_{j_m}$$

的集所成的集组是积拓扑的一个基，其中 G_{j_k} 是坐标空间 X_{j_k} 中的一个开集，这个基称为积拓扑的**定义基**(defining base)。

利用上面所说的性质就可以证明关于积空间的几个主要的事实：

定理 12.5 由拓扑空间Y到积空间 $X=\prod_i X_i$ 的函数 f 为连续函数，当且仅当对于每个射影 π_i 来说，复合映照 $\pi_i\circ f$： $Y\to X_i$ 也是连续的（见下图）。



定理 12.6 积空间 $X=\prod_i X_i$ 上的每个射影 π_i： $X\to X_i$ 既是开映照又是连续映照，即是**双连续映照**（bicontinuous mapping）。

定理 12.7 积空间 $X=\prod_i X_i$ 中一列点 p_1，p_2，…收敛于X中的一点q，当且仅当对于每个射影 π_i：$X\to X_i$ 来说，点列$\pi_i(p_1)$，$\pi_i(p_2)$，…在坐标空间 X_i 中收敛于$\pi_i(q)$。

换句话说，若 $p_1=\langle a_{1i}\rangle$，$p_2=\langle a_{2i}\rangle$，…及 $q=\langle b_i\rangle$ 是积空间 $X=\prod_i X_i$ 内的点，则

在X中 $p_n\to q$，当且仅当在每个坐标空间 X_i 中 $a_{ni}\to b_i$。

积空间之例（Example of a product space）

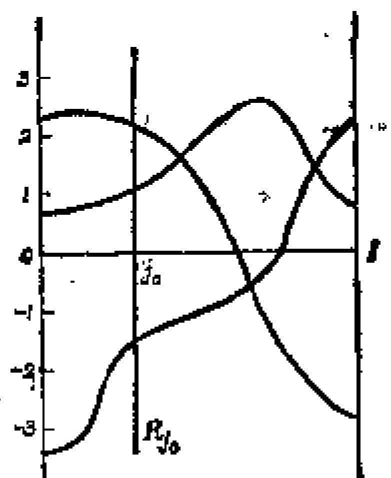
设 $\mathbf{R}$ 为实数集赋以通常拓扑，R_i 为 $\mathbf{R}$ 的拷贝；指标集为单位闭区间 $I=[0, 1]$，考察积空间 $X=\prod\{R_i, i\in I\}$。则X可以用下面的图来形象地表示。

这里水平轴表示指标集

$$I=[0,\ 1],$$

而每条经过 I 中的一点譬如说 j_0 的垂直线表示坐标空间 R_{j_0}。考察积空间 X 中的一个元素

$$p=\langle a_i:\ i\in I\rangle。$$



注意：p 对每个数 $i\in I$ 规定了实数 a_i，即 p 是定义在指标集

$$I=[0,\ 1]$$

上的一个实函数。换句话说，积空间 X 是定义在 I 上的一切实值函数类：

$$X=\{p:\ p:\ I\to \mathbf{R}\}$$

在上图中画出了 X 中的几个元素。

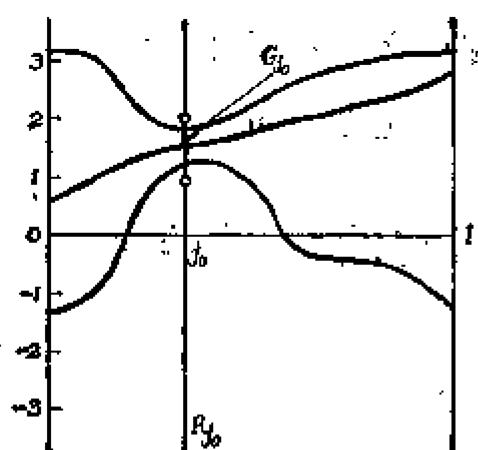
现在来描述 X 上的积拓扑的定义准基 $\mathcal{S}$ 中的一个元素。为此，记住 $\mathcal{S}$ 是由 X 中形如

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]=\prod\{R_i:\ i\neq j_0\}\times G_{j_0}$$

的一切子集所构成，其中 G_{j_0} 是坐标空间 R_{j_0} 中的一个开集。现设 G_{j_0} 是一个开区间 $(1,\ 2)$，则 $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ 是由 X 中一切满足 $a_{j_0}\in G_{j_0}=(1,\ 2)$ 这个条件的元素 $p=\langle a_i,\ i\in I\rangle$ 所构成，也就是由所有满足

$$1<p(j_0)<2$$

这个条件的函数 $p:\ I\to \mathbf{R}$ 所构成。从图形上看，$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ 是由经过位于表示坐标空间 R_{j_0} 的垂直线上的开区间



$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ 的一些元素

$$G_{j_0}=(1,\ 2)$$

的一切函数所构成，如上图所示。

最后描述X上积拓扑的定义基$\mathscr{B}$中的一个开集譬如说B。记住B是积拓扑的定义准基$\mathcal{S}$中元素的有限交，譬如说：

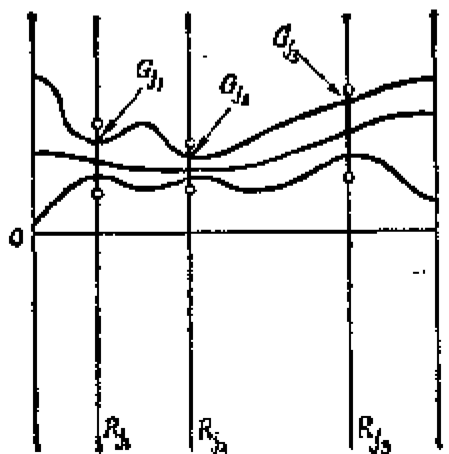
$$B=\pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}]\cap\pi_{j_2}^{-1}[G_{j_2}]\cap\pi_{j_3}^{-1}[G_{j_3}]$$

$$=\prod\{R_i:\ i\neq j_1,\ j_2,\ j_3\}\times G_{j_1}\times G_{j_2}\times G_{j_3}$$

从图形上看，B由经过位于表示坐标空间R_{j_1}，R_{j_2}，R_{j_3}的垂直线上的开集G_{j_1}，G_{j_2}，G_{j_3}的一切函数所组成。

B的某些元素如下图所示。

考察下列命题：



B 的一些元素

命题 12.8 设$\{(X_i,\ \tau_i)\}$是一簇拓扑空间，又设X表示集组$\{X_i\}$的积集，即

$$X=\prod_i X_i,$$

则X中一切形如

$$\prod\{G_i,\ i\in I\}$$

的子集构成积集X上的一个拓扑的基，其中G_i是坐标空间X_i的开子集。

注意 命题 12.8 中所说的积集$X=\prod_i X_i$上的拓扑和本章所定义的X上的积拓扑并非总是相同的。另一方面，命题 12.2 说明对于有限积空间来说，这两种拓扑是相同的。在历史上，命题 12.8 中所说的拓扑首先被研究，然后才引进 Tychonoff 积拓扑（归功于

Tychonoff）并证明了在下节中要说的在拓扑学上非常重要而有用的定理之一——Tychonoff 积定理，并且正是由于这个定理，积拓扑被认为是积集上的"正确的"拓扑。

Tychonoff 的积定理（Tychonoff's product theorem）

设P表示拓扑空间的一种性质，若当每个坐标空间X_i具备性质P时，积空间$X=\prod_i X_i$也具备性质P，则称这种性质P是"**积不变**"的（product invariant）。例如由例 1.2 可知："是 Hausdorff 空间"这种性质是积不变的，因为 Hausdorff 空间的积空间也是 Hausdorff 空间。著名的 Tychonoff 积定理所说的就是：紧致性也是一种积不变的性质：

定理 12.9（Tychonoff） 紧致空间的积也是紧致的。

这个定理证明（在习题解答中给出）依靠下面所说的集合论的引理，而这个引理的证明却要用到 Zorn 引理。这是并不奇怪的，因为事实上可以证明 Tychonoff 积定理和 Zorn 引理是等价的。

引理 12.10 设$\mathscr{A}$为集X的一个具有有限交性的子集组，若以 **P** 表示一切包含$\mathscr{A}$而又具备有限交性的集组全体，则用组的包含关系来给 **P** 赋以序关系时，**P** 有极大元素$\mathscr{M}$。

记住（见第十一章）集组$\mathscr{A}=\{A_i: i\in I\}$具备有限交性是指$\mathscr{A}$的每个有限子组，譬如说$\{A_{i_1}, \cdots, A_{i_m}\}$有非空的

交，即 $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m}\neq\varnothing$。

度量积空间（Metric product space）

设$\{(X_i, d_i)\}$为一个度量空间簇，又设X表示集组$\{X_i\}$的积集，即$X=\prod_i X_i$。因度量空间(X_i, d_i)也是拓扑空间，所以我们可以讲X上的积拓扑。另一方面，也自然会要问是否可能在积集X上定义一个度量d，使得X上由度量d诱生的拓扑与这个积拓扑相同。下面的两个命题指出当$\{(X_i, d_i)\}$是有限簇或是可列簇时，上面的问题有肯定的回答，并且这种度量不是唯一的。

命题 12.11 设(X_1, d_1), …, (X_m, d_m)是度量空间，又设$p=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle$与$q=\langle b_1, \cdots b_m\rangle$是积集$X=\prod_{i=1}^{m}X_i$中的任意两点，则下列的每个函数都是积集$X$上的一个度量：

$$d(p, q)=\sqrt{d_1(a_1, b_1)^2+\cdots+d_m(a_m, b_m)^2}$$

$$d(p, q)=\max\{d_1(a_1, b_1), \cdots, d_m(a_m, b_m)\}$$

$$d(p, q)=d_1(a_1, b_1)+\cdots+d_m(a_m, b_m)$$

而且由上面任何一个度量在X上诱生的拓扑都是积拓扑。

命题 12.12 设$\{(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots\}$是可列个度量空间所成的簇，又设$p=\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$与$q=\langle b_1, b_2, \cdots\rangle$是积集$X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$中的任意两点，则由下面公式所定义的函数$d$：

$$d(p, q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(a_n, b_n)}{1+d_n(a_n, b_n)}$$

是积集X上的一个度量，而且由这度量d所诱生的拓扑就是积拓扑。

Cantor 集（Cantor set）

现在来造一实数集T，它称为 **Cantor 集或三分集**（Ternary set）。这个集有一些引人注目的性质。其造法如下：在点$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$处将单位闭区间$I=[0, 1]$三等分，划去开区间$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，称为中间的三分之一，在$I$内余下的点集记为$T_1$，即：

$$T_1=\left[0, \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

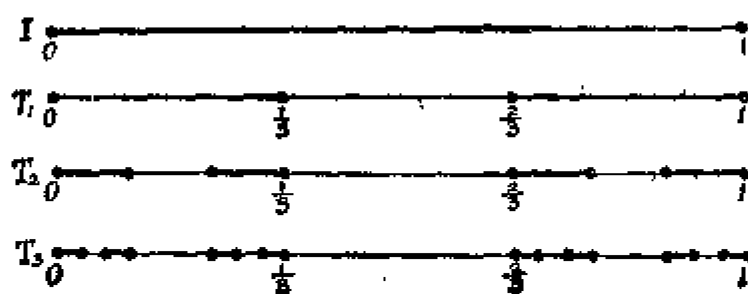
再将T_1所含的两个闭区间分别在$\frac{1}{9}$和$\frac{2}{9}$以及在$\frac{7}{9}$和$\frac{8}{9}$处各作三等分，然后划去每个的中间的三分之一，把T_1内余下的点集记为T_2：

$$T_2=\left[0, \frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

将这过程继续下去，将得一个递降的集列

$$T_1\supset T_2\supset T_3\supset\cdots,$$

其中T_m是由在T_{m-1}内“划去中间的三分之一”后余下的



点所组成。注意：T_m 是由 2^m 个互斥的闭区间组成的，将它们从左到右进行编号，则我们就可以讲"T_m 中的奇区间"或"T_m 中的偶区间"。

所谓 Cantor 集 T 就是指所有这些 T_m 的交，即：

$$T=\bigcap\{T_i: i\in \mathbf{N}\}。$$

Cantor集的性质（Properties of the Cantor set）

我们在 Cantor 集 T 上定义一个函数 f 如下：

$$f(x)=\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$$

其中

$$a_m=\begin{cases}0 & \text{若 } x \text{ 属于 } T_m \text{ 中的奇区间} \\ 2 & \text{若 } x \text{ 属于 } T_m \text{ 中的偶区间，}\end{cases}$$

于是上述序列恰好是 x 在三进制下的"小数展开"，即，其中：

$$x=a_1\left(\frac{1}{3}\right)+a_2\left(\frac{1}{9}\right)+a_3\left(\frac{1}{27}\right)+\cdots+a_m\left(\frac{1}{3^m}\right)+\cdots。$$

现在考察一个只含两个元素的离散空间，譬如说 $A=\{0, 2\}$。又设取指标为正整数 $i\in \mathbf{N}$，以 A_n 表示 A 的一个拷贝。

命题 12.13 Cantor 集 T 同胚于积空间：

$$X=\prod\{A_i: i\in \mathbf{N}\}。$$

实际上，上面定义的函数 $f: T\to X$ 是一个同胚。

注意 Cantor 集 T 具备下列一些重要性质：

(1) T 不可列。因为 T 与序列集

$$\{\langle a_1, a_2, \cdots\rangle: a_i=0 \text{ 或 } 2\}$$

等价，而后者之势为 $2^{\aleph_0}=\mathbf{c}$。

(2) T 的"测度"为零。因为 T 关于 $I=[0, 1]$

的余集的测度，即中间三分之一的那些集之并的测度等于

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\cdots=1。$$

但 $I=[0,1]$ 的测度也是 1，因此 T 的测度是零。

习 题 解 答

积空间

1．考察 $X=\{a, b, c\}$ 上的拓扑 $\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$ 及 $Y=\{u, v\}$ 上的拓扑 $\tau^*=\{Y, \varnothing, \{u\}\}$。

（i）求 $X\times Y$ 上的积拓扑的定义准基 $\mathcal{S}$。

（ii）求 $X\times Y$ 上的积拓扑的定义基 $\mathscr{B}$。

解：首先注意：

$$X\times Y=\{\langle a, u\rangle, \langle a, v\rangle, \langle b, u\rangle, \langle b, v\rangle, \langle c, u\rangle, \langle c, v\rangle\}$$

是积集，在它上面定义了积拓扑。

（i）定义准基 $\mathcal{S}$ 是由逆象集组 $\pi_x^{-1}[G]$ 和 $\pi_y^{-1}[H]$ 所组成的，其中 G 是 X 中开集，H 是 Y 中开集，计算得到：

$$\pi_x^{-1}[X]=\pi_y^{-1}[Y]=X\times Y$$

$$\pi_x^{-1}[\varnothing]=\pi_y^{-1}[\varnothing]=\varnothing$$

$$\pi_x^{-1}[\{a\}]=\{\langle a, u\rangle, \langle a, v\rangle\}$$

$$\pi_x^{-1}[\{b, c\}]=\{\langle b, u\rangle, \langle b, v\rangle, \langle c, u\rangle, \langle c, v\rangle\}$$

$$\pi_y^{-1}[\{u\}]=\{\langle a, u\rangle, \langle b, u\rangle, \langle c, u\rangle\}。$$

因此定义准基由 $X\times Y$ 的上述子集组成。

（ii）定义基 $\mathscr{B}$ 是由定义准基 $\mathcal{S}$ 中元素的一切有限交所组成，就是说，

$\mathscr{B}=\{X\times Y,\ \varnothing,\ \{\langle a, u\rangle\},\ \{\langle b, w\rangle, \langle c, w\rangle\},$
$\{\langle a, u\rangle, \langle a, v\rangle\},\ \{\langle b, u\rangle, \langle b, v\rangle, \langle c, u\rangle, \langle c, v\rangle\},$
$\{\langle a, u\rangle, \langle b, u\rangle, \langle c, u\rangle\}\}$。

2. 求证定理 12.5：由拓扑空间Y到积空间$X=\prod_i X_i$的函数$f: Y\to X$为连续，当且仅当对于任何射影$\pi_i: X\to X_i$来说，复合映照$\pi_i\circ f: Y\to X_i$是连续的。

解：按积空间的定义，一切射影都是连续的。故若f连续则$\pi_i\circ f$作为两个连续函数的复合也是连续的。

另一方面，假设每个复合函数$\pi_i\circ f: Y\to X_i$是连续的，又设G为X_i的一个开子集，则由$\pi_i\circ f$的连续性得：

$$(\pi_i\circ f)^{-1}[G]=f^{-1}[\pi_i^{-1}[G]]$$



是Y中的一个开集。但由具有下述形式之集：

$\pi_i^{-1}[G]$，其中G是X_i的开子集

所成的集组是X上积拓扑的定义准基，因为它们在映照f下的逆象是Y中的开集。故由定理 7.2 可知f是一个连续函数。

3. 设B为积空间$X=\prod_i X_i$的定义基中的一个元素，求证：B向任何坐标空间的射影都是开集。

解：因B属于X的定义基，故

$$B=\prod\{X_i: i\neq j_1,\cdots,j_m\}\times G_{j_1}\times\cdots\times G_{j_m}$$

其中G_{j_k}是X_{j_k}中的一个开集。因此对任何射影$\pi_\alpha: X\to X_\alpha$来说，有：

$$\pi_\alpha(B)=\begin{cases}X_\alpha & 若\ \alpha\neq j_1,\cdots,j_m\\ G_\alpha & 若\ \alpha\in\{j_1,\cdots,j_m\}\end{cases}$$

不论哪种情况下，$\pi_\alpha(\bar{B})$都是开集。

4. 求证定理 12.6：积空间 $X=\prod_i X_i$ 上的每个射影 π_i：$X\to X_i$ 都既是开的又是连续的，即：是双连续的。

解：由积空间的定义知一切射影都连续，故只须证它们是开的。

设 G 为积空间 $X=\prod_i X_i$ 的一个开集。对于每点 $p\in G$，积拓扑的定义基中有元素 B，使 $p\in B\subset G$。因此，对于每个射影 π_i：$X\to X_i$ 有

$$\pi_i(p)\in\pi_i[B]\subset\pi_i[G]。$$

由上一习题知 $\pi_i[B]$ 是开集。换句话说，$\pi_i[G]$ 中的任何一点 $\pi_i(p)$ 都属于含在 $\pi_i[G]$ 中的某个开集 $\pi_i[B]$，于是，$\pi_i[G]$ 是开集。

5. 求证定理 12.7：积空间 $X=\prod_i X_i$ 中的一个点列 p_1，p_2，…收敛于一点 $q\in X$，当且仅当对于每个射影 π_i：$X\to X_i$ 来说，序列 $\pi_i(p_1)$，$\pi_i(p_2)$，…在坐标空间 X_i 内收敛于 $\pi_i(q)$。

解：假设 $p_n\to q$，则因所有射影都连续，故 $\pi_i(p_n)\to\pi_i(q)$。

反之，设对每个射影 π_i 来说，都有 $\pi_i(p_n)\to\pi_i(q)$，为了证 $p_n\to q$，只须证明：若 B 是积空间 $X=\prod_i X_i$ 的定义基中的一个元素而且是含有 $q\in X$ 的，则

$$\text{有 } n_0\in\mathbf{N} \quad \text{使当 } n>n_0 \text{ 时就有 } p_n\in B$$

由积空间 $X=\prod_i X_i$ 的定义基的定义，得

$$B=\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}]\cap\cdots\cap\pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]$$

其中 G_{j_k} 是坐标空间 X_{j_k} 的一个开子集。注意：$q\in B$，故 $\pi_{j_1}(q)\in\pi_{j_1}[B]=G_{j_1}$，…，$\pi_{j_m}(q)\in\pi_{j_m}[B]=G_{j_m}$。按假设有 $\pi_{j_i}(p_n)\to\pi_{j_i}(q)$。故对每个 $i=1,2,\cdots,m$

$$\text{有 } n_i\in\mathbf{N} \quad \text{使当 } n>n_i \text{ 时有 } \pi_{j_i}(p_n)\in G_{j_i}$$

$$\text{从而 } p_n\in\pi_{j_i}^{-1}[G_{j_i}]。$$

令 $n_0=\max(n_1,\cdots n_m)$，则

$$\text{当 } n>n_0 \text{ 时有 } p_n\in\pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}]\cap\cdots\cap\pi_{j_m}^{-1}[G_{j_m}]=B$$

从而 $p_n\to q$。

Tychonoff 定理

6．求证引理 12.10：设 $\mathscr{A}$ 为集 X 的一个具有有限交性的子集组，考察 $\mathscr{A}$ 的一切具有有限交性的母组所成之簇 $\mathbf{P}$，则用组包含关系在 $\mathbf{P}$ 中引入序关系时，$\mathbf{P}$ 有最大元素 μ。

解：设 $\mathbf{T}=\{B_i\}$ 是 $\mathbf{P}$ 的一个有完全序的子簇，又设 $\mathscr{B}=\bigcup_i\mathscr{B}_i$，我们来证 $\mathscr{B}\in\mathbf{P}$，即 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的母组而又具备有限交性。由此推得 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{T}$ 的一个上界，因此根据 Zorn 引理就得：$\mathbf{P}$ 有最大元素 μ。

由于每个 $\mathscr{B}_i$ 都是 $\mathscr{A}$ 的母组，故 $\mathscr{B}=\bigcup_i\mathscr{B}_i$ 也是 $\mathscr{A}$ 的母组。为了证明 $\mathscr{B}$ 有有限交性，令 $\{A_1,\cdots,A_m\}$ 为 $\mathscr{B}$ 的任一有限子组。但 $\mathscr{B}=\bigcup_i\mathscr{B}_i$，因此

$$\text{有 } \mathscr{B}_{i_1},\cdots,\mathscr{B}_{i_m}\in\mathbf{T} \text{ 使 } A_1\in B_{i_1},\cdots A_m\in\mathscr{B}_{i_m}$$

注意 $\mathbf{T}$ 是一个完全序簇，故 $\mathscr{B}_{i_1},\cdots,\mathscr{B}_{i_m}$ 中必有一个，譬如说是 $\mathscr{B}_{i_{j_0}}$，包含所有的集 A_i，并且因为 $\mathscr{B}_{i_{j_0}}$ 有有限交性，故

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \neq \varnothing。$$

这证明了 $\mathscr{B}$ 中的任一有限子组 $\{A_1, \cdots, A_m\}$ 有非空之交，也就是说，$\mathscr{B}$ 有有限交性，因此 $\mathscr{B} \in \mathbf{P}$。

7. 求证：引理 12.10 中所说的最大元素 μ 有下列性质：

(i) μ 中一元素的任何母集都属于 μ。

(ii) μ 中有限个元素之交也属于 μ。

(iii) 若 $A \cap M \neq \varnothing$ 对任何 $M \in \mu$ 成立，则 $A \in \mu$。

解：这里只给出 (ii) 的证明，(i)，(iii)的证明留作补充习题。

(ii) 我们只需证 μ 中任意两个集 A 与 B 之交 $A \cap B = C$ 也属于 μ，因为由此出发用归纳法便知(ii)正确。

若已证得 $\mu \cup \{C\}$ 具有有限交性，则 $\mu \cup \{C\}$ 将属于 $\mathbf{P}$。因 μ 是 $\mathbf{P}$ 中的极大元素，故 $\mu \cup \{C\} = \mu$，于是 $C \in \mu$，证明就完成了。

现设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 $\mu \cup \{C\}$ 的有限子组，则出现两种情况：

(1) $C \notin \{A_1, \cdots, A_m\} \subset \mu \cup \{C\}$ 则 $\{A_1, \cdots, A_m\}$ 仅仅是 μ 的有限子组，但 μ 有有限交性，故

$$A_1 \cap \cdots \cap A_m \neq \varnothing。$$

(2) $C \in \{A_1, \cdots, A_m\}$，譬如说 $C = A_1$，则

$$\begin{aligned} A_1 \cap \cdots \cap A_m &= C \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \\ &= A \cap B \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \neq \varnothing \end{aligned}$$

因为 $A, B, A_2, \cdots, A_m \in \mu$。

在两种情况下，$\{A_1, \cdots, A_m\}$ 都有非空之交，故

$$\mu \cup \{C\} \in \mathbf{P}。$$

据上述理由，$O\in\mu$。

8．求证 Tychonoff 定理（定理 12.9）：设 $\{A_i: i\in I\}$ 为紧致空间簇，则积空间 $X=\prod\{A_i: i\in I\}$ 也是紧致的。

解：设 $\mathscr{A}=\{F_j\}$ 为 X 的任一闭集组，并设它有有限交性，若我们证得 $\mathscr{A}$ 本身之交非空（由定理 11.4，这也就证明了 Tychonoff 定理），即有 $p\in X$ 使 $p\in F_j$ 对每个 $F_j\in\mathscr{A}$ 成立，则定理已证得。

设 $\mu=\{M_k: k\in K\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个极大母组并具有有限交性（见引理 12.10），令 $\overline{\mu}=\{\overline{M}_k: k\in K\}$，注意：

$$F_j\in\mathscr{A}\Longrightarrow F_j=\overline{F}_j$$

及

$$F_j\in\mu\Longrightarrow\overline{F}_j\in\overline{\mu}$$

因此若可证明 $\overline{\mu}$ 本身之交非空，则 $\mathscr{A}$ 本身之交亦非空。换句话说，需要证的只是：

有 $p\in X$ 使 $p\in\overline{M}_k$ 对任何 $k\in K$ 成立

或只须证：

有 $p\in X$ 使对 $X=\prod A_i$

上之积拓扑的定义基中任一元素 B 来说。由 $p\in B$ 可得

$$B\cap M_k\neq\varnothing \text{ 对每个 } k\in K \text{ 成立} \tag{1}$$

因为这样 p 就成为每个集 M_k 的一个聚点，从而含在 $\overline{M}_k$ 中。

注意：$\mu=\{M_k: k\in K\}$ 有有限交性。因此对于每个射影 $\pi_i: X\to A_i$ 来说，坐标空间 A_i 中的集组：

$$\{\pi_i[M_k]: k\in K\}$$

也有有限交性。从而相应的闭包组

$$\{\overline{\pi_i[M_k]}: k\in K\}$$

是坐标空间 A_i 中具有有限交性的闭集组。按假设 A_i 是紧致

空间，因此$\{\overline{\pi_i[M_k]}: k\in K\}$有非空之交，即：

有$a_i\in A_i$ 使$a_i\in\overline{\pi_i[M_k]}$对任何$k\in K$成立。或即：

有$a_i\in A_i$ 使对于坐标空间A_i中的任何开集G_i来说，

由$a_i\in G_i$可得

$$G_i\cap\pi_i[M_k]\neq\varnothing \text{对每个} k\in K \text{成立} \quad (2)$$

现在令$p=\langle a_i: i\in I\rangle$，我们来证$p$满足条件(1)。设$p\in B$，其中$B$是$X=\prod_i A_i$上之积拓扑的定义基中的一个集，即

$$B=\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}]\cap\cdots\cap\pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]$$

其中G_{i_a}是A_{i_a}的一个开子集。

注意：由$p\in B$可得$\pi_{i_1}(p)=a_{i_1}$属于$\pi_{i_1}[B]=G_{i_1}$，所以由上面的(2)，得

$$G_{i_1}\cap\pi_{i_1}[M_k]\neq\varnothing \quad \text{对每个} k\in K \text{成立}$$

由此可得

$$\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}]\cap M_k=(\prod\{A_i: i\neq i_1\}\times G_{i_1})\cap M_k\neq\varnothing$$

$$\text{对每个} M_k\in\mu \text{成立}$$

于是根据上一习题中所说的μ的性质(iii)可得：$\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}]$属于μ。类似地，$\pi_{i_2}^{-1}[G_{i_2}]$，…，$\pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]$也属于μ。但μ满足有限交性，故

$$B\cap M_k=\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}]\cap\cdots\cap\pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]\cap M_k\neq\varnothing$$

$$\text{对每个} k\in K \text{成立}$$

于是(1)得到满足，定理得证。

Cantor 集

9．求证 Cantor 集T是$\mathbf{R}$中的闭集。

解：注意 T_m 是 2^m 个闭区间之并，所以 T_m 作为有限个闭集的并也是闭集。但 $T=\bigcap\{T_i: i\in\mathbf{N}\}$，故 T 作为闭集的交是闭集。

10．求证 T 是紧致集。

解：因为 T 是实数集 $\mathbf{R}$ 中的有界闭集，所以 T 是紧致集。

11．设 $X=\prod\{A_i: i\in\mathbf{N}\}$，其中 $A_i=\{0, 2\}$ 赋以离散拓扑，求证 X 是紧致集。

解：注意：因为 A_i 是有限集，所以 A_i 紧致。所以由 Tychonoff 积定理可知 $X=\prod_i A_i$ 也是紧致集。

12．设 $X=\{A_i: i\in\mathbf{N}\}$，其中 $A_i=\{0, 2\}$ 赋以离散拓扑。

（i）求证由下式定义的函数 $f: X\to T$：

$$f(\langle a_1, a_2, \cdots\rangle)=a_1\left(\frac{1}{3}\right)+a_2\left(\frac{1}{9}\right)+a_3\left(\frac{1}{27}\right)+\cdots$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

是一个连续函数。

（ii）求证 X 同胚于 T。

解：(i) 令 $p=\langle a_1, a_2, \cdots\rangle\in X$；又令 $\varepsilon>0$，我们要证：X 中有含 p 的开集 B 存在，使

$$\text{由 } x\in B \text{ 可得 } |f(x)-f(p)|<\varepsilon。$$

注意 $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i$ 收敛，故

$$\text{有 } n_0\in\mathbf{N} \quad \text{使} \sum_{i=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i<\varepsilon$$

考察X的子集：

$$B=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_{n_0}\}\times A_{n_0+1}\times A_{n_0+2}\times\cdots$$

注意 $p\in B$ 而且B是 $X=\prod_i A_i$ 上积拓扑的定义基中的一个元素，从而是开集，并且

当 $x=\langle a_1, \cdots, a_{n_0}, b_{n_0+1}, b_{n_0+2}, \cdots\rangle\in B$ 时有

$$|f(x)-f(p)|=\left|\sum_{i=n_0+1}^{\infty}(b_i-a_i)\left(\frac{1}{3}\right)^i\right|\leqslant\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i<\varepsilon,$$

故f连续。

（ii）函数f：$X\to T$ 是由紧致空间X到度量空间T之上的 1—1 连续函数。由定理 11.8 知f是一个同胚映照。

补 充 习 题

积空间

13．求证作为T_1-空间的性质是积不变的，即T_1-空间的积也是T_1-空间。

14．求证作为正则空间的性质是积不变的。

15．求证作为完全正则空间的性质是积不变的。

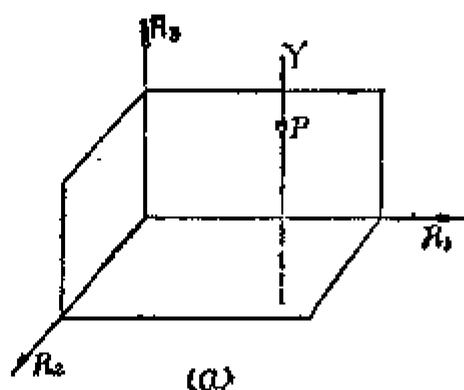
16．求证：设 $p=\langle a_i: i\in I\rangle$ 是积空间 $X=\prod\{X_i: i\in I\}$ 的任一点，则对任一 $j_0\in I$，

$$X_{j_0}\times\prod\{a_i: i\neq j_0\}\quad 与 X_{j_0} 是同胚的$$

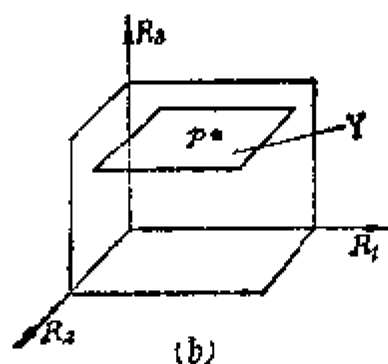
（在三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的特例中，此定理指出通过 $p=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ 的直线，譬如说

$$Y=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\mathbf{R}_3=\{\langle a_1, a_2, x\rangle: x\in\mathbf{R}\}$$

与 $\mathbf{R}$ 同胚。见图 (a)。



(a)



(b)

17．求证：设 $p=\langle a_i: i\in I\rangle$ 是积空间 $X=\prod\{X_i: i\in I\}$ 中的任一点，则对任一 $j_0\in I$，$\{a_{j_0}\}\times\prod\{X_i: i\neq j_0\}$ 同胚于 $\prod\{X_i: i\neq j_0\}$（在三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的特例中，这个定理指出通过 $p=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ 的平面，譬如说

$$Y=\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2\times\{a_3\}=\{\langle x, y, a_3\rangle: x, y\in\mathbf{R}\}$$

同胚于 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$）。见图($b$)。

18．求证 Tychonoff 积定理的逆命题，即若积空间 $X=\prod_i X_i$ 是紧致的，则每一坐标空间 X_i 也是紧致的。

19．设 A 是积空间 $X=\prod\{X_i: i\in I\}$ 的一个子集，又设 $\pi_{i_A}: A\to X_i$ 表示投影 $\pi_i: X\to X_i$ 到 A 的一个收缩。求证 A 上的相对拓扑是使函数 π_{i_A} 连续的最粗拓扑。

20．(i) 求证第一可数空间的可数积是第一可数的。

(ii) 说明第一可数空间的任意积不必是第一可数的。

21．求证一个不可数的积空间 $X=\prod_i X_i$ 是不可度量化的（除非除可数个坐标空间外皆为单点集）。

22．(i) 求证第二可数空间的可数积是第二可数的。

(ii) 说明第二可数空间的任意积不必是第二可数的。

23．设 A_i 是拓扑空间 X_i 的任一子集，于是 $\prod_i A_i$ 是积空间 $X=\prod_i X_i$ 的一个子集。求证：

(i) $\prod_i \overline{A_i} = \overline{\prod_i A_i}$，　　(ii) $\prod_i A_i^\circ \supset (\prod_i A_i)^\circ$

举例说明对于(ii)，一般说来，等式不成立。

24．设 A_i 是 X_i 的任一子空间，求证$\prod_i A_i$ 上的积拓扑与$\prod_i A_i$ 作为积空间 $\prod_i X_i$ 的一子集的相对拓扑是相等的。

积集上的任意拓扑

25：求证命题 12.8：设 $\{(X_i, \tau_i): i\in I\}$是一个拓扑空间簇，又设$X$是集 X_i 的积，即 $X=\prod_i X_i$。则X的具有形式$\prod\{G_i: i\in I\}$的子集组组成积集X上拓扑τ的基，其中G_i是坐标空间 X_i 的开子集。

26．求证积集$X=\prod_i X_i$ 上的积拓扑粗于上一习题(命题12.8)中所定义的X上的拓扑τ。

27．试举一例说明积集$X=\prod_i X_i$ 上的拓扑τ粗于X上的积拓扑。

28．设τ是习题25(命题12.8)中所定义的积集$X=\prod_i X_i$ 上的拓扑。求证若每个坐标空间 X_i 是离散的，则(X, τ) 亦为离散的。

有限积

29．求证命题 12.2：具有形式 $G_1\times\cdots\times G_m$ 的积空间$X=X_1\times\cdots\times X_m$ 的子集组组成X上的积拓扑的一个基，其中 G_i 是 X_i 的开子集。

30．求证：若 $\mathscr{B}$ 是X的一个基，$\mathscr{B}^*$ 是Y的一个基，则 $\{G\times H: G\in\mathscr{B}, H\in\mathscr{B}^*\}$ 是积空间 $X\times Y$ 的一个基。

31. 求证若 $\mathscr{B}_a$ 是在 $a\in X$ 处的一个局部基，$\mathscr{B}_b$ 是在 $b\in Y$ 处的一个局部基，则 $\{G\times H: G\in\mathscr{B}_a, H\in\mathscr{B}_b\}$ 是在 $p=\langle a, b\rangle\in X\times Y$ 处的局部基。

32. 求证两个第一可数空间的积是第一可数空间。

33. 求证两个第二可数空间的积是第二可数空间。

34. 求证两个可分空间的积是可分的。

35. 求证两个紧致空间的积是紧致的（不用 Zorn 引理或其等价形式）。

36. 设 τ^* 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上由半开矩形

$$[a, b)\times[c, d)=\{\langle x, y\rangle: a\leqslant x<b, c\leqslant y<d\}$$

所产生的拓扑。而且，设 τ 为实直线 $\mathbf{R}$ 上由左闭右开区间 $[a, b)$ 所产生的拓扑。求证 $(\mathbf{R}^2, \tau^*)$ 是 $(\mathbf{R}, \tau)$ 与它自身的积。

37. 举反例说明两个正规空间的积不必是正规的。

38. 设 $A\subset X$, $B\subset Y$，因而 $A\times B\subset X\times Y$，求证

(i) $\overline{A}\times\overline{B}=\overline{A\times B}$ (ii) $A^\circ\times B^\circ\supset(A\times B)^\circ$ *

（注意[见习题 23] 等式一般不成立）。

39. 设 $f: X\to Y$，又设 $F: X\to X\times Y$ 由

$$F(x)=\langle x, (f(x)\rangle$$

所定义。求证 f 连续，当且仅当 F 是 X 与 $F(X)$ 的一个同胚（注意 $F(X)$ 称为 f 的图）。

40. 设 X 是 $\mathbf{R}$ 上的一个赋范向量空间，求证由

$$f(\langle p, q\rangle)=p+q$$

所定义的函数 $f: X\times X\to X$ 是连续的。

41. 设 X 是 $\mathbf{R}$ 上的一个赋范向量空间，求证由

* 译者注：原文为 $A^\circ\times B^\circ=(A\times B)^\circ$

$$f(\langle k, p\rangle)=kp$$

所定义的函数f：$\mathbf{R}\times X\rightarrow X$ 是连续的。

度量积空间

42．求证：m 维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 的每一有界闭子集是紧致的。

43．求证命题 12.11：设$(X_1, d_1), \cdots, (X_m, d_m)$是度量空间，又设 $p=\langle a_1, \cdots, a_m\rangle$ 和 $q=\langle b_1, \cdots, b_m\rangle$ 是积集

$$X=\prod_{i=1}^{m} X_i$$

中的任意二点，则下列每一个函数是X上的一个度量：

(i) $d(p, q)=\sqrt{d_1(a_1, b_1)^2+\cdots+d_m(a_m, b_m)^2}$

(ii) $d(p, q)=\max\{d_1(a_1, b_1), \cdots, a_m(a_m, b_m)\}$

(iii) $d(p, q)=d_1(a_1, b_1)+\cdots+d_m(a_m, b_m)$

而且，由上述度量的每一个所诱生的X上的拓扑是积拓扑。

44．求证命题 12.12：设$\{(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots\}$为度量空间的可列组，又设 $p=\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 与 $q=\langle b_1, b_2, \cdots\rangle$ 是积集$X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$中的任意两点，则由

$$d(p, q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(a_n, b_n)}{1+d_n(a_n, b_n)}$$

所定义的函致d 是X上的一个度量，且由d 所诱生的拓扑是积拓扑。

第十三章　连　通　性

分离集（Separated seds）

拓扑空间X中的两个集A与B称为**分离的**（separated），是指它们满足下列两个条件：

（i）A与B互斥，

（ii）每个集都不含另一集的聚点。

换句话说，A与B为分离，当且仅当

$$A\cap\overline{B}=\varnothing \quad 同时 \quad \overline{A}\cap B=\varnothing。$$

例 1.1　考察实直线$\mathbf{R}$上下列三个区间：

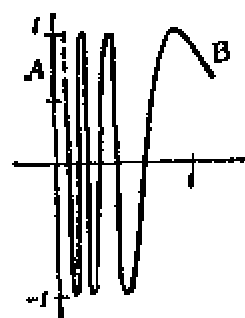
$$A=(0,\ 1),\ B=(1,\ 2)\ 及\ C=[2,\ 3)$$

则A与B是分离的，因为$\overline{A}=[0,\ 1]$，$\overline{B}=[1,\ 2]$，故$A\cap\overline{B}$与$\overline{A}\cap B$都是空集。另一方面，B与C不是分离的，因为$2\in C$是B的极限点，于是$\overline{B}\cap C=[1,\ 2]\cap[2,\ 3)=\{2\}\neq\varnothing$。

例 1.2　考察平面$\mathbf{R}^2$上下列的点集（见下图）：

$$A=\{\langle 0,\ y\rangle:\ \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\}$$

$$B=\{\langle x,\ y\rangle:\ y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leqslant 1\}$$



则A中的每点都是B的聚点，故A，B不是分离集。

连通集（Connected sets）

定义 拓扑空间X中的点集A称为**不连通**(disconnected)，是指X中有开集G与H存在，使得$A\cap G$与$A\cap H$均非空而互斥，同时它们的并为A。这时$G\cup H$称为A的一个**分解**（disconnection)。一个集若不是不连通时，就称为**连通集**(connected set)。

注意：$A=(A\cap G)\cup(A\cap H)$ iff $A\subset G\cup H$

及 $\varnothing=(A\cap G)\cap(A\cap H)$ iff $G\cap H\subset A^c$

由此可知：$G\cup H$是A的一个分解，当且仅当

$A\cap G\neq\varnothing$，$A\cap H\neq\varnothing$，$A\subset G\cup H$ 及 $G\cap H\subset A^c$。

另外注意：空集与单元素集$\{p\}$总是连通的。

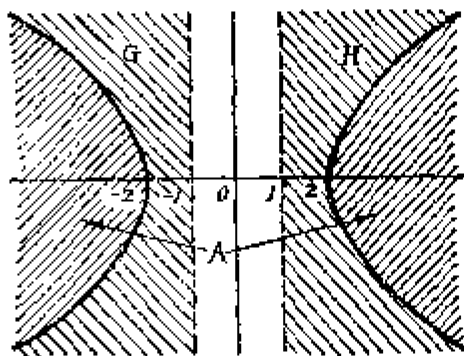
例 2.1 $\mathbf{R}^2$平面上的下列集：

$$A=\{\langle x, y\rangle: x^2-y^2\geqslant 4\}$$

是不连通的，因为两个开的半平面：

$$G=\{\langle x, y\rangle: x<-1\} \text{ 及 } H=\{\langle x, y\rangle: x>1\}$$

构成A的一个分解。如下图所示。



例 2.2 考察$X=\{a, b, c, d, e\}$上的下列拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{c\}\}$$

则$A=\{a, d, e\}$是不连通的。因为令$G=\{a, b, c\}$及$H=$

$\{c, d, e\}$，则 $A\cap G=\{a\}$，$A\cap H=\{d, e\}$ 是非空的互斥集，它们的并是 A（注意：G 与 H 是不互斥的）。

连通性与分离性之间的基本关系如下：

定理13.1 一个集是连通集，当且仅当它不是两个非空的分离集之并。

下面的命题是很有用的。

定理13.2 若 A 与 B 都是连通集，它们又不互相分离，则 $A\cup B$ 是连通的。

例 2.3 设 A 与 B 为例 1.2 所说的平面 $\mathbf{R}^2$ 上的两个集。以后我们将证 A 与 B 各自为连通集，但 A 与 B 又不互相分离。故由上述命题，$A\cup B$ 是连通集。

连通空间（Connected spaces）

连通性，和紧致性一样是集的一种绝对性质，即：

定理13.3 设 A 为拓扑空间 (X, τ) 的一个子集，则 A 相对于 τ 为连通集的充要条件是 A 相对于 A 上的相对拓扑 τ_A 是连通的。

连通的拓扑空间就称为**连通空间**（connected space）。由上述定理，我们通常只在连通空间上讨论连通性。

例 3.1 设 X 为不连通的拓扑空间，又设 $G\cup H$ 是 X 上一个分解，则

$$X=(X\cap G)\cup(X\cap H) \text{ 同时有}$$
$$(X\cap G)\cap(X\cap H)=\varnothing$$

但 $X\cap G=G$，$X\cap H=H$，因此 X 是不连通集，当且仅当有非空的开集 G 与 H 存在使 $X=G\cup H$ 及 $G\cap H=\varnothing$。

根据上述例题的讨论，可以归结出连通空间的简单特征如下：

定理 13.4 拓扑空间X为连通空间，当且仅当(i) X不能表为两个非空的互斥开集之并。或等价地说(ii) X与$\varnothing$是X中仅有的既开又闭的集。

例 3.2 考察$X=\{a, b, c, d, e\}$上的下列拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

则X是不连通的，因$\{a\}$与$\{b, c, d, e\}$是互余的，因此既是开的又是闭的。换句话说，

$$X=\{a\}\cup\{b, c, d, e\}$$

是X的一个分解。注意：在子集$A=\{b, d, e\}$上的相对拓扑是$\{A, \varnothing, \{d\}\}$，因此$A$是连通的。这是因为在相对拓扑中仅有$A$与$\varnothing$是$A$的既开又闭的子集。

例 3.3 实直线$\mathbf{R}$赋以通常拓扑时是连通空间。因为在$\mathbf{R}$的子集中，只有$\mathbf{R}$与$\varnothing$是既开又闭的。

例 3.4 设f是由连通空间X到拓扑空间Y的一个连续函数。则$f: X\to f[X]$是连续的（其中$f[X]$赋以相对拓扑）。

我们来证明$f[X]$是连通的。假设$f[X]$不连通，譬如说G与H构成$f[X]$的一个分解。则

$$f[X]=G\cup H \text{ 同时 } G\cap H=\varnothing$$

从而

$$X=f^{-1}[G]\cup f^{-1}[H] \text{ 同时 }$$
$$f^{-1}[G]\cap f^{-1}[H]=\varnothing$$

由于f连续，故$f^{-1}[G]$与$f^{-1}[H]$都是X的开集，于是上式说明$f^{-1}[G]$与$f^{-1}[H]$构成X的一个分解，而这是不可能的（因按假设X是连通的）。这就证明了若X是连通的，则$f[X]$也是连通的

上述例题的结果可叙述成一定理：

定理 13.5 连通集的连续映象是连通的。

例 3.5 设X为不连通空间，譬如说$G\cup H$是X的一个分解。则函数：

$$f(x)=\begin{cases}0 & 若\ x\in G\\ 1 & 若\ x\in H\end{cases}$$

是由X到离散空间$Y=\{0, 1\}$上的连续函数。

另一方面，由定理 13.5 可知：一个连通空间X的连续映象不可能是不连通的离散空间$Y=\{0, 1\}$。换句话说：

引理 13.6 拓扑空间X是连通空间，当且仅当由X到离散空间$Y=\{0, 1\}$的仅有的连续函数是常值函数$f(x)=0$或常值函数$f(x)=1$。

实直线上的连通性（Connectedness on the real line）

实直线上的连通集可以很简单地叙述如下：

定理 13.7 实直线**R**上至少含有两点的一个集E为连通集，当且仅当E是一个区间。

注意：实直线**R**上的区间有下列的一些形式：

有限区间：(a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$

无限区间：$(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞),

$[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$

区间E的特征可以用下列性质表示：

$$a, b\in E, a<x<b \Longrightarrow x\in E$$

因为连通集的连续映象也是连通集，所以可得 Weierstrass 介值定理（定理 4.9）的推广如下：

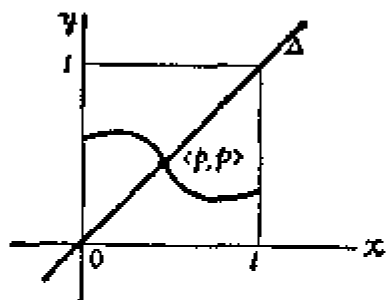
定理 13.8 设f: $X\to$**R** 是定义在连通集X上的一个实连续

函数，则 f 可以取得它的任意两个函数值之间的每个值。

例 4.1 连通性理论的一个重要应用是所谓"不动点定理"(fixed point theorem)：设 $I=[0, 1]$，又设 $f: I\to I$ 是连续函数，则有 $p\in I$ 使 $f(p)=p$。

这个定理可以用几何图象解释如下：首先注意 $f: I\to I$ 的图象落在单位正方形

$$I^2=\{\langle x, y\rangle: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$$



内，则定理是说 f 的图象（它是把正方形左边界线上一点同右边界线上一点连结起来的一条曲线）必然与正方形的对角线△有一个交点，譬如说，(p, p)，如左图所示。

分支（Components）

拓扑空间X的一个**分支** (component) E 是指X中的一个极大的连通子集，即：它是连通的又不是X中任何连通集的真子集。显然E是非空的。

关于拓扑空间的分支的主要事实叙述在下面的定理中。

定理 13.9 拓扑空间X的一切分支构成X的一个分割，即：它们是互斥的，且它们的并就是 X。同时X中的任何连通子集都含在某个分支中。

这样，每点 $p\in X$ 都属于X中唯一的一个分支，这个分支称为"含p的分支" (component of p)。

例 5.1 若X是连通的，则X只有一个分支，就是X本身。

例 5.2 考察 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 上的下列拓扑：

$$\tau=\{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$
则X的分支是$\{a\}$与$\{b, c, d, e\}$，X中其他的连通集，例如$\{b, d, e\}$（见例3.2）是某个分支的一个子集。

可用例5.1的事实来证明连通性是积不变性，即：

定理13.10 连通空间之积是连通的。

推论13.11 m维欧氏空间$\mathbf{R}^m$是连通的。

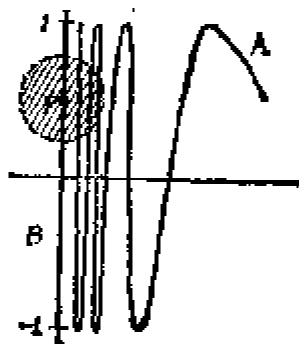
局部连通空间（Locally connected spaces）

拓扑空间X称为**在$p\in X$局部连通**（locally connected at $p\in X$）是指：任何含p点的开集都含有一个含p点的连通开集，也就是说：含p点的一切连通开集构成p点处的一个局部基。

若拓扑空间X在它的每一点处都是局部连通的，也就是说X的一切连通开子集构成X的一个基，则X称为一个**局部连通空间**（locally connected space）。

例6.1 每个离散空间X都是局部连通的，因若$p\in X$，则$\{p\}$是含p点的开连通集，并且是含在任何含p点的开集之内。注意：若X含多于一点时，X是不连通的。

例6.2 设A与B为例1.2中所说的平面$\mathbf{R}^2$的子集，则$A\cup B$是一个连通集，但$A\cup B$在点$p=\langle 0, 1\rangle$不是局部连通的。例如：以p为中心，以$\frac{1}{4}$为半径的开盘不含p点的任何连通邻域。



道路（Paths）

设$I=[0, 1]$为闭单位区间，X为拓扑空间，若连续函

数 f: $I\to X$ 有性质：$f(0)=a$ 及 $f(1)=b$，则称之为在拓扑空间X内由点 a 到点 b 的一条**道路**(path)。这里 a 点称为这条道路的**起点**(initial point)，b 点称为这条道路的**终点** (terminal point)。

例 7.1 对于任何点 $p\in X$，由 $e_p(s)=p$ 定义的常值函数 e_p: $I\to X$ 是连续函数，因而是一条道路，它称为在 p 点处的**常值道路**(constant path)。

例 7.2 设 f: $I\to X$ 是一条由 a 到 b 的道路。则由 $\hat{f}(s)=f(1-s)$ 所定义的函数 $\hat{f}$: $I\to X$ 是一条由 b 到 a 的道路。

例 7.3 设 f: $I\to X$ 是一条由 a 到 b 的道路。g: $I\to X$ 是一条由 b 到 c 的道路，则由下式定义的函数 $f*g$: $I\to X$:

$$(f*g)(s)=\begin{cases} f(2s) & \text{若 } 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & \text{若 } \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}$$

是由原有的两条道路相衔直而成的由 a 到 c 的一条道路，它是沿道路 f 由 a 到 b，然后沿道路 g 由 b 到 c 而得到的。

弧连通集 (Arcwise connected sets)

设E为拓扑空间X的一个子集，如果对于E中的任何两点 $a, b\in E$，都有一条含在E中而由 a 到 b 的道路 f: $I\to X$ (即 $f[I]\subset E$)，则称 E 为一个**弧连通集** (arcwise connected set)。

X中的极大的弧连通集称为一个**弧连通的分支** (arcwise connected component)，X中所有的弧连通分支构成X的一个分割。

弧连通与连通之间有以下关系：

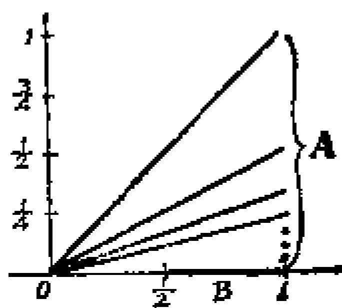
定理 13.12 弧连通集是连通的。

上述定理的逆命题是不成立的，如下面例题所示。

例 8.1 考察平面 $\mathbf{R}^2$ 上的子集：

$$A=\{\langle x, y\rangle: 0\leqslant x\leqslant 1, y=x/n, n\in \mathbf{N}\}$$
$$B=\{\langle x, 0\rangle: 1/2\leqslant x\leqslant 1\}$$

其中A是由所有连结原点$\langle 0, 0\rangle$与点$\left\langle 1, \frac{1}{n}\right\rangle$ ($n\in \mathbf{N}$) 的线段上的点所组成；B是由x轴上$\frac{1}{2}$与1之间的一切点所组成。现在A与B都是弧连通的，因而也是连通的；另外，A与B又是不互相分离的，因为每点$p\in B$都是A的一个极限点。于是$A\cup B$是连通的。但$A\cup B$却不是弧连通的，因为实际上不存在A上任何一点到B上任何一点的道路。



例 8.2 设A,B为例 1.2 中所说的平面 $\mathbf{R}^2$ 上的两个点集，则A与B都是区间的连续映象从而是连通的。另外A与B是不互相分离的，因而$A\cup B$是连通的，但$A\cup B$不是弧连通的。因为实际上，不存在由A上任何一点到B上任何一点的道路。

平面 $\mathbf{R}^2$ 上的拓扑学是单变量复函数论的一个重要部分。在复函数论中，把平面上的开连通集称为一个**区域** (region)，下面的定理在复函数论中是重要的。

定理 13.13 平面 $\mathbf{R}^2$ 上的开连通集是弧连通的。

同伦道路 (Homotopic paths)

设$f: I\to X$及$g: I\to X$是有相同的起点$p\in X$及相同

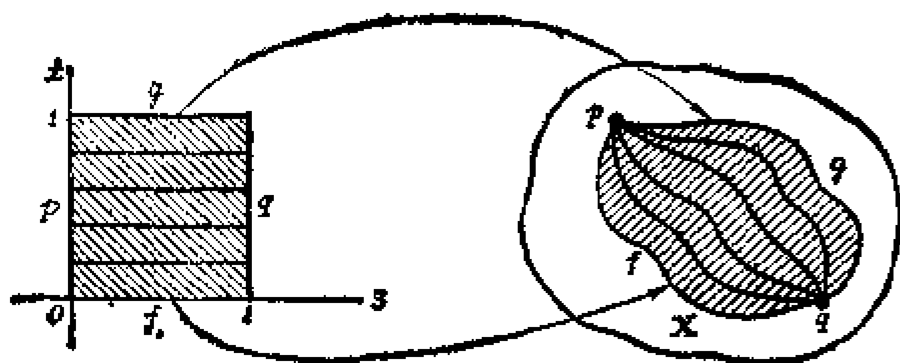
的终点 $q \in X$ 的两条道路。如果有连续函数

$$H: I^2 \to X$$

存在，使得

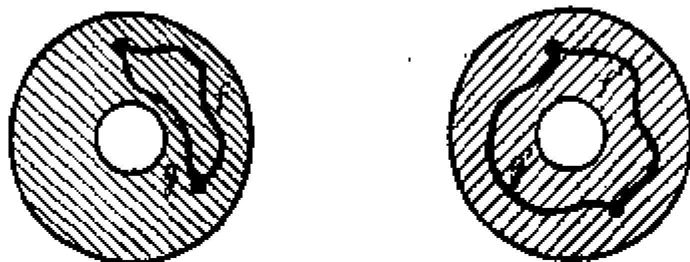
$$H(s, 0) = f(s) \qquad H(0, t) = p$$
$$H(s, 1) = g(s) \qquad H(1, t) = q$$

如附图所示，则称 f **同伦**于 g (homotopic)，记为 $f \simeq g$。我



们说 f 可以连续地变成 g。函数 H 则称为一个由 f 到 g 的**同伦** (homotopy)。

例 9.1 设 X 表示圆环上所有点所成的点集，则下面左图中的道路 f 与 g 是同伦的；但是右图中的道路 f' 与 g' 不是同伦的。



例 9.2 设 f: $I \to X$ 是一条道路，则 $f \simeq f$，即：f 同伦于它本身。这是因为由下式

$$H(s, t) = f(s)$$

所定义的函数 H: $I^2 \to X$ 是由 f 到 f 的一个同伦。

例 9.3 设 $f \simeq g$，又譬如说 H: $I^2 \to X$ 是由 f 到 g 的

一个同伦。则由下式

$$\hat{H}(s, t) = H(s, 1-t)$$

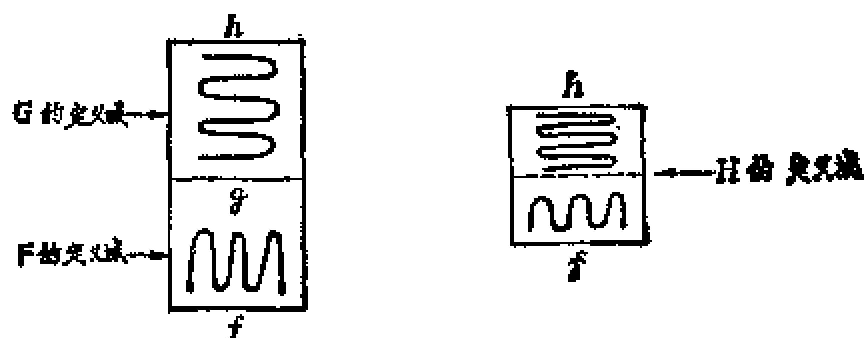
所定义的函数$\hat{H}$: $I^2 \to X$ 是由 g 到 f 的一个同伦。因此 $g \simeq f$。

例9.4 设 $f \simeq g$, $g \simeq h$; 又譬如说 F: $I^2 \to X$ 是 f 到 g 的一个同伦，G: $I^2 \to X$ 是 g 到 h 的一个同伦。则由下式

$$H(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t) & \text{若 } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(s, 2t-1) & \text{若 } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

定义的函数 H: $I^2 \to X$ 是由 f 到 h 的一个同伦。因此 $f \simeq h$。

同伦H可以几何地解释为：把F与G的定义域压缩到一个正方形中去（见下图）。



由上述三个关系可得下面的命题：

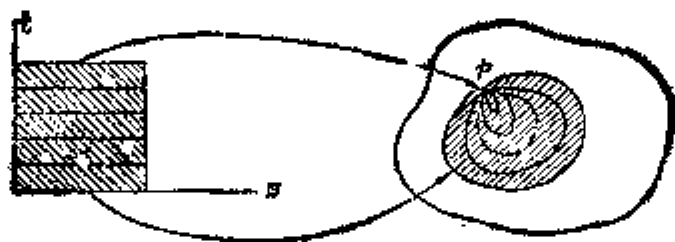
命题 13.14 在由 a 到 b 的一切道路所成的簇中，同伦关系是一种等价关系。

单连通空间（Simply connected spaces）

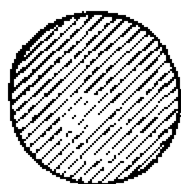
一条道路 f: $I \to X$，其起点和终点相同，譬如说 $f(0) = f(1) = p$，称为一条**闭于 $p \in X$ 的道路**(closed path at $p \in X$)。特别地，由 $e_p(s) = p$ 所定义的常值道路 e_p: $I \to X$ 是一条闭于 p 点的道路。

一条闭道路 $f: I \to X$ 若同伦于常值道路，则称为**"可收缩于一点"**（contractable to a point）。

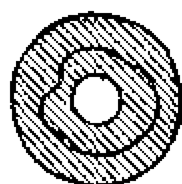
设X为拓扑空间。若X中每条闭道路都可收缩于一点，则X称为一个**单连通**(simply connected)的拓扑空间。



例 10.1 平面$\mathbf{R}^2$上的一个开盘是单连通的；而一个圆环不是单连通的。这是因为如下图所示：环内有些闭曲线是不能收缩于一点的。



单连通的



不是单连通的

习 题 解 答

分离集

1. 求证：若A与B为非空的分离集，则$A \cup B$是不连通的。

解：因A、B分离，故$A \cap \overline{B} = \varnothing$及$\overline{A} \cap B = \varnothing$。令$G = \overline{B}^c$及$H = \overline{A}^c$，则$G$，$H$均为开集，且

$$(A \cup B) \cap G = A \text{ 及 } (A \cup B) \cap H = B$$

为非空互斥集，它们的并为$A \cup B$。因此G与H是$A \cup B$的

一个分解，从而 $A\cup B$ 是不连通的。

2. 设 $G\cup H$ 是A的一个分解，求证：$A\cap G$ 与 $A\cap H$ 是分离集。

解：因 $G\cup H$ 是A的一个分解，故 $A\cap G$ 及 $A\cap H$ 互斥。所以要证的只是：这两个集任何一个都不含另一集的聚点。为此，设 p 是 $A\cap G$ 的一个聚点，并设 $p\in A\cap H$，则 H是含p的开集，从而H含 $A\cap G$ 中不同于p的点，即 $(A\cap G)\cap H\neq\varnothing$，但

$$(A\cap G)\cap(A\cap H)=\varnothing=(A\cap G)\cap H,$$

这就出现矛盾，所以 p 是 $A\cap G$ 的聚点时，$p\notin A\cap H$。

同理可证：当p是 $A\cap H$ 的聚点时，则 $p\notin A\cap G$。这就证明了 $A\cap G$ 与 $A\cap H$ 是分离的。

3. 求证定理 13.1：集A为连通集，当且仅当A不是两个非空的分离集之并。

解：我们将证其等价命题：A 为不连通，当且仅当A是两个非空的分离集之并。

现设A不连通，并设 $G\cup H$ 是A的一个分解，则A是非空集 $A\cap G$ 与 $A\cap H$ 之并，由上一习题，它们是互相分离的。

另一方面，若A是两个非空的分离集之并，则由习题 1，A 是不连通的。

连通集

4. 设 $G\cup H$ 是A的一个分解，又设B是A的一个连通的子集。求证：或者 $B\cap G=\varnothing$或者 $B\cap H=\varnothing$，从而或者是 $B\subset H$ 或者 $B\subset G$。

解：因 $B\subset A$，故

$$A\subset G\cup H \Longrightarrow B\subset G\cup H$$

及
$$G\cap H\subset A^c \Longrightarrow G\cap H\subset B^c。$$

因此，若 $B\cap G$ 与 $B\cap H$ 皆非空，则 $G\cup H$ 将是B的一个分解，但B是连通的，所以就得到了结论。

5. 求证命题 13.2：若A与B是连通集，它们又不互相分离，则 $A\cup B$ 是连通的。

解：假设 $A\cup B$ 不连通，并设 $G\cup H$ 是 $A\cup B$ 的一个分解。因A是 $A\cup B$ 的一个连通子集，故由前一习题，$A\subset G$ 或 $A\subset H$，类似地有：$B\subset G$ 或 $B\subset H$。

若 $A\subset G$ 及$B\subset H$（或 $B\subset G$ 及 $A\subset H$），则由习题 2 可知：

$$(A\cup B)\cap G=A \text{ 与 } (A\cup B)\cap H=B$$

是分离集，但这和假设矛盾。因此 $A\cup B\subset G$ 或 $A\cup B\subset H$，所以 $G\cup H$ 不是 $A\cup B$ 的分解。

换句话说，$A\cup B$ 是连通的。

6. 求证：设 $\mathscr{A}=\{A_i\}$ 是X中的一个连通集组，其中任何两个集都不是分离的，则 $B=\bigcup_i A_i$ 是连通的。

解：设B不连通，并设 $G\cup H$ 是B的一个分解。则因每个 $A_i\in\mathscr{A}$ 是连通集，故含在G中而与H无交点，或含在H中而与G无交点（见习题 4）。另外，又由于$\mathscr{A}$中任何两个元素 A_{i_1} 与 A_{i_2} 都不分离，故由命题 13.2，$A_{i_1}\cup A_{i_2}$ 是连通的，于是 $A_{i_1}\cup A_{i_2}$ 含在G与H二者之一中而与另一个不相交，从而$\mathscr{A}$中所有的元素并且因此 $B=\bigcup_i A_i$ 必含在G与H二者之一中而与另一个无交点，但这和 $G\cup H$ 是B的一个分解这个事实相矛盾，所以B是连通的。

7. 求证：设 $\mathscr{A}=\{A_i\}$ 是 X 中的一个连通集组，并设这个组有非空的交，则 $B=\bigcup_i A_i$ 是连通的。

解：因 $\bigcap_i A_i \neq \varnothing$，故 $\mathscr{A}$ 中任何两个元素都不互斥，因而不互相分离，于是根据上一习题，$B=\bigcup_i A_i$ 是连通集。

8. 设 A 是 X 的一个连通子集，又设 $A\subset B\subset \overline{A}$，求证：$B$ 是连通集，从而特别地 $\overline{A}$ 是连通集。

解：设 B 不连通，并设 $G\bigcup H$ 是 B 的一个分解，则因 A 是 B 的一个连通的子集，故由习题 4，或有 $A\cap H=\varnothing$，或有 $A\cap G=\varnothing$，譬如说 $A\cap H=\varnothing$，则 H^c 是 A 的一个闭的母集，因此 $A\subset B\subset \overline{A}\subset H^c$，从而有 $B\cap H=\varnothing$，但这和 $G\bigcup H$ 是 B 的一个分解的假定是矛盾的。这个矛盾说明了 B 是连通的。

连通空间（Connected spaces）

9. 设 X 为拓扑空间，求证下列条件等价：

（i）X 不连通。

（ii）X 有非空的既开又闭的真子集。

解：(i)$\Longrightarrow$(ii) 设 $X=G\bigcup H$，其中 G 与 H 都是非空的开集，则 G 是 X 的非空的真子集，并由于 $G=H^c$，所以 G 既开又闭。

(ii)$\Longrightarrow$(i) 设 A 是 X 的既开又闭的真子集，则 A^c 也是非空的开集，并且 $X=A\bigcup A^c$，从而 X 不连通。

10. 求证定理 13.3：设 A 是拓扑空间 (X, τ) 的子集；又设 τ_A 是 A 上的相对拓扑。则 A 为 τ 连通，当且仅当 A 为 τ_A 连通。

解：设 A 不连通，并设 $G\bigcup H$ 构成 A 的一个 τ 分解，则

因 $G, H\in\tau$，故 $A\cap G$，$A\cap H\in\tau_A$，从而 $A\cap G$ 与 $A\cap H$ 构成 A 的一个 τ_A 分解，从而 A 是 τ_A 不连通。

另一方面，设 A 是 τ_A 不连通，譬如说 G^* 与 H^* 构成 A 的一个 τ_A 分解，则 $G^*, H^*\in\tau_A$，因而

$$\text{有 } G, H\in\tau \text{ 使 } G^*=A\cap G \text{ 及 } H^*=A\cap H$$

但 $A\cap G^*=A\cap(A\cap G)=A\cap G$ 及

$$A\cap H^*=A\cap(A\cap H)=A\cap H$$

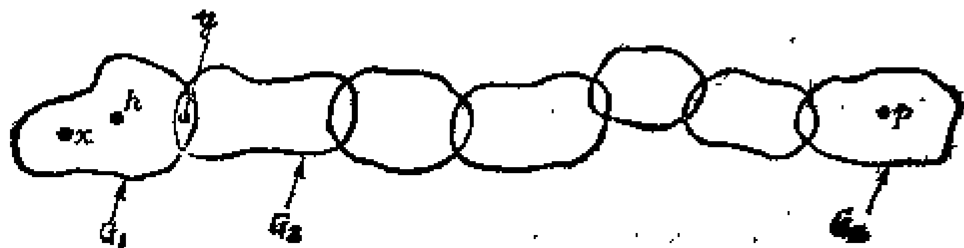
所以 $G\cup H$ 是 A 的一个 τ 分解，因此 A 是 τ 不连通的。

11. 设 $p, q\in X$；$A_1, \cdots, A_m$ 是 X 的子集，若 A_1（且仅只 A_1）含 p；A_m（仅只 A_m）含 q；当且仅当 $|i-j|>1$ 时 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则称 $A_1, \cdots, A_m$ 构成一条联结 p 与 q 的简单（有限）链（sinple(finite) chain）。

求证：设 X 是连通的，又设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开复盖，则 X 中任何两点可以用一条由 $\mathscr{A}$ 中之元素构成的简单链联结起来。

解：设 p 为 X 中任意的一点，又设 H 表示 X 中那些可以用由 $\mathscr{A}$ 中之元素构成的简单链和 p 点联结起来的点全体。则因 $p\in H$ 故 $H\neq\varnothing$，我们将在下面证明 H 是既开又闭的，这样由于 X 是连通空间，可得 $H=X$。

设 $h\in H$，则有 $G_1, \cdots, G_m\in\mathscr{A}$ 构成一条联结 h 与 p 的简单链，但若 $x\in G_1\setminus G_2$，则 $G_1, \cdots, G_m$ 构成一条联结 x 与 p 的简单链；而若 $y\in G_1\cap G_2$，则 $G_2, \cdots, G_m$ 构成一条联结 y 与 p 的简单链，如下图所示：



于是 G_t 是H的子集，即 $h\in G_1\subset H$，因此H是它的每一点的一个邻域，从而H是开集。

现令 $g\in H^c$，因$\mathscr{A}$是X的一个复盖，故有 $G\in\mathscr{A}$ 使 $g\in G$（G 是开集）。若 $G\cap H\neq\varnothing$，则有 $h\in G\cap H\subset H$，所以有 $G_1,\cdots,G_m\in\mathscr{A}$ 构成一条联结 h 与 p 的简单链，但这样一来，就使 $G, G_k, \cdots, G_m$（其中K是G与G_k相交中的最大值）或 $G_1,\cdots,G_m$ 成为一条联结 g 与 p 的简单链，从而 $g\in H$，而这与 $g\in H^c$ 相矛盾。因此 $G\cap H=\varnothing$，并因此有 $g\in G\subset H^c$，于是 H^c 是一个开集，于是 $H^{cc}=H$ 是闭集。

12．求证定理 13.7：设E为实直线 **R** 上至少含有两点的点集，则E为连通的，当且仅当E是一个区间。

解： 设E不是一个区间，则

$$\text{有 } a, b\in E,\ p\notin E \text{ 使 } a<p<b$$

令 $G=(-\infty, p)$，$H=(p, \infty)$，则 $a\in G$，$b\in H$，从而 $E\cap G$ 与 $E\cap H$ 是非空的互斥集，它们的并是 E，因此E不连通。

现设E为一个区间，并假设E是不连通的，譬如说设G与H构成E的一个分解。令 $A=E\cap G$，$B=E\cap H$，则 $E=A\cup B$。现因 A，B 非空，故可设 $a\in A$，$b\in B$，$a<b$ 及 $p=\sup\{A\cap[a, b]\}$。因 $[a, b]$ 是闭集，故 $p\in[a, b]$ 因此 $p\in E$。

设 $p\in A=E\cap G$，则 $p<b$ 及 $p\in G$，因G是开集，故

$$\text{有 } \delta>0 \text{ 使 } p+\delta\in G \text{ 及 } p+\delta<b$$

因此 $p+\delta\in E$，并有 $p+\delta\in A$。但这和 $p=\sup\{A\cap[a, b]\}$ 的定义相矛盾的，因此 $p\notin A$。

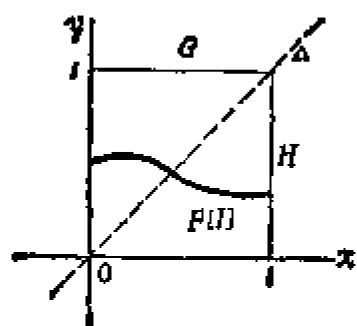
另一方面，假设 $p\in B=E\cap H$，则特别有 $p\in H$，因H是开集，故

$$\text{有 } \delta^*>0 \text{ 使 } [p-\delta^*, p]\subset H \text{ 及 } a<p-\delta^*$$

因此 $[p-\delta^*, p]\subset E$，所以 $[p-\delta^*, p]\subset B$。从而，$[p-\delta^*, p]\cap A=\varnothing$。但这就是说 $p-\delta^*$ 是 $A\cap[a, b]$的一个上确界，然而这是不可能的因为 $p=\sup\{A\cap[a, b]\}$，所以 $p\notin B$。而这和 $p\in E$ 的假设是矛盾的。

所以 E 是连通的。

13．求证（见例 4.1）：设 $I=[0, 1]$，又设 $f: I\to I$ 是连续函数，则有 $p\in I$ 使 $f(p)=p$。



解：若 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$，则定理成立。故可设 $f(0)>0$ 及 $f(1)<1$。现因 f 连续，故由

$$F(x)=\langle x, f(x)\rangle$$

定义的函数 $F: I\to \mathbf{R}^2$ 的图象也是连续的。

令 $G=\{\langle x, y\rangle: x<y\}$，$H=\{\langle x, y\rangle: y<x\}$；则 $\langle 0, f(0)\rangle\in G\langle 1, f(1)\rangle\in H$。因此，若 $F[I]$ 不含有对角线：

$$\triangle=\{\langle x, y\rangle: x=y\}=\mathbf{R}^2\setminus(G\cup H)$$

上的点，则 $G\cup H$ 是 $F[I]$ 的一个分解。但这与下述事实矛盾：$F[I]$ 作为连通集 I 的连续映象是连通的。因此 $F[I]$含有一点 $\langle p, p\rangle\in\triangle$，所以 $f(p)=p$。

分 支

14．求证：每个分支 E 都是闭的。

解：因 E连通，故由习题 8，$\bar{E}$ 是连通的，且 $E\subset\bar{E}$，但 E是一个分支，因而是一个极大的连通集，故 $E=\bar{E}$，即 E是闭集。

15．求证：设 $p\in X$，又设 $\mathscr{A}_p=\{A_i\}$ 是X中含 p 的连

通集组。此外令$C_p=\bigcup_i A_i$，则 (i)C_p是连通的；(ii) 若B是X中含p的连通集，则 $B\subset C_p$；(iii) C_p是X中一个极大连通集，即：是一个分支。

解：(i) 因每个 $A_i\in\mathscr{A}_p p$，都含p，故$p\in\bigcap_i A_i$，因而由习题 7 可知：$C_p=\bigcup_i A_i$ 是连通的。

(ii) 若B是X中含p的连通集，则$B\in\mathscr{A}_p$，从而$B\subset C_p=\bigcup\{A_i;\ A_i\in\mathscr{A}_p\}$。

(iii) 设$C_p\subset D$，其中D是连通集，则因$p\in D$故由 (ii) 有$D\subset C_p$，那就是$C_p=D$，所以C_p是一个分支。

16. 求证定理 13.9：X 的所有的分支构成X的一个分割。X 中的任何连通集都含在某个分支中。

解：考察集组$\mathscr{C}=\{C_p;\ p\in X\}$，其中$C_p$是按上一习题所定义的。易证$\mathscr{C}$由$X$中所有的分支所组成，这是因为由上一习题已知每个$C_p\in\mathscr{C}$是一个分支；另一方面，若$D$是一个分支，则$D$含$X$中的某点$p_0$，所以$D\subset C_{p_0}$，但$D$是一个分支，故$D=C_{p_0}$。

现在来证$\mathscr{C}$是X的一个分割，显然$X=\bigcup\{C_p;p\in X\}$，所以只须证明不同的分支是互斥的，或证明等价说法：若$C_p\cap C_q\neq\varnothing$，则$C_p=C_q$。设$a\in C_p\cap C_q$，则因$C_p$，$C_q$都是含$a$点的连通集，故$C_p\subset C_a$，$C_q\subset C_a$。但$C_p$，$C_q$都是连通集，所以$C_p=C_q=C_a$。

最后，若E是X中的非空的连通集，则E含X中的某点p_0，则由上一习题$E\subset C_{p_0}$而若$E=\varnothing$，则E含在每个分支中。

17. 求证：若X与Y为连通空间，则$X\times Y$是连通的，

因此有限个连通空间的积是连通的。

解：设 $p=\langle x_1, y_1\rangle$，$q=\langle x_2, y_2\rangle$ 是 $X\times Y$ 中任何二点，则 $\{x_1\}\times Y$ 与 Y 同胚因此是连通的，同理 $X\times\{y_2\}$ 也是连通的。

但 $\{x_1\}\times Y\cap X\times\{y_2\}=\{\langle x_1, y_2\rangle\}$，因此 $\{x_1\}\times Y\cup X\times\{y_2\}$ 是连通的。从而 p 与 q 属于相同的分支，但 p, q 是 $X\times Y$ 中的任何两点，故 $X\times Y$ 是一个分支，所以是连通的。

18．求证定理 13.10：连通空间的积是连通的，即：连通性是一个积不变性。

解：设 $\{X_i: i\in I\}$ 是一簇连通空间；又设 $X=\prod_i X_i$ 为积空间。另外设 $p=\langle a_i: i\in I\rangle\in X$；又设 $E\subset X$ 是含 p 的分支，我们来证明：X 中的每点 $x=\langle x_i: i\in I\rangle$ 都属于 E 的闭包，因而也就属于 E（因由第 14 题，E 是闭的）。为此，令

$G=\prod\{X_i: i\neq i_1, \cdots, i_m\}\times G_{i_1}\times\cdots\times G_{i_m}$ 为含 $x\in X$ 的一个基开集，由于

$H=\prod\{\{a_i\}: i\neq i_1, \cdots, i_m\}\times X_{i_1}\times\cdots\times X_{i_m}$ 同胚于 $X_{i_1}\times\cdots\times X_{i_m}$，从而是连通的。另外因 $p\in H$，故 H 是 E 的子集也是含 p 的分支（因 E 是含 p 的分支，而 H 是含 p 的连通集），但 $G\cap H$ 是非空的，故 G 含 E 中的点，从而 $x\in\bar{E}=E$，这说明 X 是一个分支因而是连通的。

弧连通集

19．设 f: $I\to X$ 是 X 中的任一道路，求证：f 的值域 $f[I]$ 是连通的。

解：因 $I=[0, 1]$ 是连通的，f 又是连续的，故由定理

13.5，$f[I]$ 是连通的。

20. 弧连通集的连续映象是弧连通的。

解：设 $E\subset X$ 是弧连通集，并设 $f: X\to Y$ 是连续函数，我们要证 $f[E]$ 是弧连通集。

为此，设 $p, q\in f[E]$，则有 $p^*, q^*\in E$ 使 $f(p^*)=p$ 及 $f(q^*)=q$，但 E 是弧连通的，故

有一条道路 $g: I\to X$，使 $g(0)=p^*, g(1)=q^*$

及 $g[I]\subset E$。

因连续函数的复合是连续函数，故 $f\circ g: I\to Y$ 是连续的，而且有：

$$f\circ g(0)=f(p^*)=p$$
$$f\circ g(1)=f(q^*)=q$$
$$f\circ g[I]=f[g[I]]\subset f[E]$$

由此可知 $f[E]$ 是弧连通的。

21. 求证定理 13.12：弧连通集 A 是连通的。

解：设 A 为弧连通集。若 A 为空集，则 A 为连通。设 A 为非空集，譬如说 $p\in A$，则因 A 弧连通，故对每个 $a\in A$，有道路 $f_a: I\to A$ 把 p 与 a 联结起来，其次，因

$a\in f_a[I]\subset A$ 故 $A=\bigcup\{f_a[I]: a\in A\}$。

但对于每个 $a\in A$ 来说，均有 $p\in f_a[I]$；因此 $\bigcap\{f_a[I]: a\in A\}$ 是非空的，此外（由习题 7）因每个 $f_a[I]$ 连通，A 是连通的。

22. 求证：设 $\mathscr{A}$ 为 X 中的一组弧连通集，并设它们的交非空，则 $B=\bigcup\{A: A\in\mathscr{A}\}$ 是弧连通的。

解：设 $a, b\in B$，则

有 $A_a, A_b\in\mathscr{A}$ 使得 $a\in A_a, b\in A_b$。

现在$\mathscr{A}$有一非空的交，譬如说$p\in\bigcap\{A: A\in\mathscr{A}\}$，则$p\in A_a$，并因$A_a$弧连通故有一条道路$f: I\to A_a\subset B$把$a$与$p$联结起来。同理，有道路$g: I\to A_b\subset B$把$p$与$b$联结起来。而（由例7.3）这两条道路衔接成一条含在B内由a到b的道路，因此B是弧连道的。

23. 求证：平面$\mathbf{R}^2$上的一个开圆盘是弧连通的。

解：设$p=\langle a_1, b_1\rangle$, $q=\langle a_2, b_2\rangle\in D$。则由下式

$$f(t)=\langle a_1+t(a_2-a_1), b_1+t(b_2-b_1)\rangle$$

定义的函数$f: I\to\mathbf{R}^2$是含在D内的一条从p到q的道路(从几何上看，$f[I]$是联结p与q的直线段)。因此D是弧连通的。

24. 求证定理13.13：设E为平面$\mathbf{R}^2$上一个非空的开连通集，则E是弧连通的。

解：证法一　设$p\in E$，并设G为E中可以用E中的道路和p联结起来的那些点所成的集，可以证明G是开的。

为此，令$q\in G\subset E$，则因E是开集，故有以q为中心的开盘D使$q\in D\subset E$，但D是弧连通的，故开盘D内每点x都可以和q相联结，从而也可以和p相联结，这说明D中每点x都可以和p点相联结，所以$q\in D\subset G$，故G是开集。

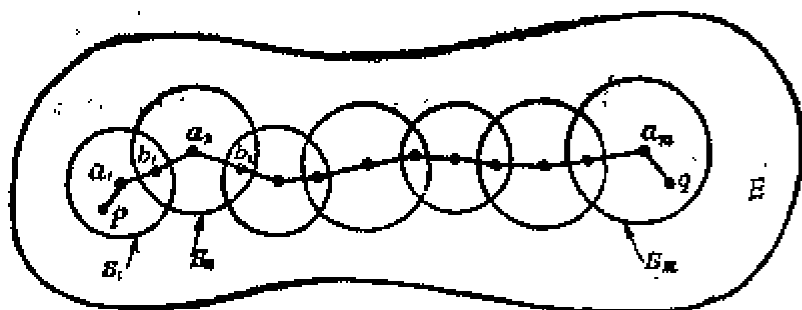
现设$H=E\setminus G$，即H是E中不能用E中的道路和p相联结的点全体，我们可以证明H是开集。

为此，设$q^*\in H\subset E$。因E是开集，故有以q^*为中心的开盘D^*，使$q^*\in D^*\subset E$。因D^*是弧连通的，每个$x\in D^*$不可能用在E中的一条道路与p相联结，故$q^*\in D^*\subset H$，因此H是开集。

但E是连道集，故E不可能是两个非空斥开集之并。则

$H=\varnothing$，所以 $E=G$ 是弧连通的。

证法二 因 E 是开集，故 E 是开盘组之并。但 E 是连通的，故由习题 11，对于 E 内任何两点 p 与 q 来说，有 E 中的开盘 $S_1, \cdots, S_m$ 存在，它们形成一条联结 p 与 q 的简单链，设 a_i 为 S_i 的中心，并设 $b_i \in S_i \cap S_{i+1}$，则由 p 点到 a_1 然后到 b_1，再到 a_2, b_2, …最后到 q 的那条折线是含在上述几个开盘之并内，因而是含在 E 中，这就证明了 E 是弧连通的。



完全不连通空间

25．设 X 为拓扑空间，若对于 X 中的任何两点 p, q，有 X 的一个分解 $G \cup H$ 存在，使得 $p \in G$ 而 $q \in H$，则 X 称为**完全不连通**(totally disconnected)的空间。求证：实直线 $\mathbf{R}$ 赋以由一切左开右闭区间 $(a, b]$ 所产生的拓扑时是完全不连通的。

解：设 $p, q \in \mathbf{R}$，譬如说 $p<q$，则 $G=(-\infty, p]$ 与 $H=(p, \infty)$ 是互斥的开集，它们的并是 $\mathbf{R}$，就是说 $G \cup H$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个分解。但是 $p \in G$, $q \in H$；因此 $(\mathbf{R}, \tau)$ 是完全不连通的。

26．求证：有理数集 $\mathbf{Q}$ 赋以通常相对拓扑时是完全不连通的。

解：设 $p, q \in \mathbf{Q}$，譬如说 $p<q$，则有无理数 a 使 $p<a$

$<q$，令 $G=\{x\in \mathbf{Q}: x<a\}$，$H=\{x\in \mathbf{Q}: x>a\}$，则 $G\cup H$ 是 $\mathbf{Q}$ 的一个分解，而且 $p\in G$ 及 $q\in H$，因此 $\mathbf{Q}$ 是完全不连通的。

27．求证：完全不连通空间X的分支是X的单元素集。

解：设E是X的一个分支，并设 $p, q\in E$，同时 $p\neq q$。因X完全不连通，故有X的分解$G\cup H$存在使 $p\in G$ 及 $q\in H$。由此可得：$E\cap G$ 与 $E\cap H$ 非空，从而 $G\cup H$ 是E的一个分解，但这和E是一个分支从而是连通的假设互相矛盾的，这说明E含有两个不同的点是不可能的，亦即E恰好只含一个点。

局部连通空间

28．求证：设E是局部连通空间X的一个分支，则E是开集。

解：设 $p\in E$，因X局部连通，故p至少属于一个开连通集 G_p。但E是含p的分支，故

$$p\in G_p\subset E \quad 从而 \quad E=\bigcup\{G_p: p\in E\}$$

故E作为开集之并是开集。

29．求证若X与Y是局部连通的，则 $X\times Y$ 也是局部连通的。

解：注意：X为局部连通，当且仅当它有由连通集构成的基$\mathscr{B}$。同理，Y有由连通集组构成的基$\mathscr{B}^*$。但 $X\times Y$ 是有限积，故

$$\{G\times H: G\in\mathscr{B}, H\in\mathscr{B}^*\}$$

是积空间 $X\times Y$ 的基，由于 G, H 是连通集，所以 $G\times H$ 是连通的，换句话说，$X\times Y$ 有由连通集构成的基，故 $X\times Y$

是局部连通的。

30．设 $\{X_i\}$ 是一簇连通的又是局部连通的空间，则积空间 $X=\prod_i X_i$ 也是局部连通的。

解：设G是X中含 $p=\langle a_i: i\in I\rangle\in X$ 的开集，则定义基中有一个元素

$$B=G_{i_1}\times\cdots\times G_{i_m}\times\prod\{X_i: i\neq i_1, \cdots, i_m\}$$

使 $p\in B\subset G$，从而 $a_{i_k}\in G_{i_k}$，而由于每个坐标空间都是局部连通的，因此有连通的开子集 $H_{i_k}\subset X_{i_k}$ 使

$$a_{i_1}\in H_{i_1}\subset G_{i_1}, \cdots, a_{i_m}\in H_{i_m}\subset G_{i_m}$$

令

$$H=H_{i_1}\times\cdots\times H_{i_m}\times\prod\{X_i: i\neq i_1, \cdots, i_m\}$$

由于每个 X_i 是连通的，每个 H_{i_k} 也是连通的，所以H也是连通的。另外，H是开的，且 $p\in H\subset B\subset G$，从而X是局部连通的。

补 充 习 题

连通空间

31．求证若(X, τ)是连通的，$\tau^*\lesssim\tau$，则 (X, τ^*) 也是连通的。

32．求证若(X, τ)是不连通的，$\tau\lesssim\tau^*$，则(X, τ^*)也是不连通的。

33．求证每一个不可分空间是连通的。

34．用反例说明连通性不是一个遗传性质。

35．求证：若 $A_1, A_2, \cdots$是使 A_1 与 A_2，A_2 与 A_3，…等每相邻两个都不是分离的连通集序列，则 $A_1\cup A_2\cup\cdots$是连通的。

36. 求证：设E是含有多于一个元素的T_1-空间的一个连通子集，则E是无限集。

37. 求证：一个拓扑空间X是连通的，当且仅当X的每一非空真子集有一个非空的边界。

分 支

38. 求离散空间的各个分支。

39. 求有限余空间的各个分支。

40. 求证任一对分支是分离的。

41. 求证：若X有有限个分支，则每一分支既开又闭的。

42. 求证：若E是X的既开又闭的非空连通子集，则E是一个分支。

43. 求证：设E是Y的一个分支，又设$f: X \to Y$是连续的，则$f^{-1}[E]$是X的一些分支的并。

44. 求证：设X是一个紧致空间。若X的分支是开的，则它们只有有限个。

弧连通集

45. 求证不可分空间是弧连通的。

46. 求证：X的弧连通分支组成X的一个分割。

47. 求证：X的每一分支被弧连通分支所分割。

杂 题

48. 求证一个不可分空间是单连通的。

49. 求证完全不连通空间是Hausdorff的。

50．求证：设G是局部连通空间X的一个开子集，则G是局部连通的。

51．设$A=\{a, b\}$是离散的，又设$I=[0, 1]$，求证积空间$X=\prod\{A_i: A_i=A, i\in I\}$不是局部连通的。因而局部连通性不是积不变的。

52．求证"单连通的"是一个拓扑性质。

53．求证：设X是局部连通的，则X是连通的，当且仅当存在一个联结X中每一对点的连通集的简单链。

第十四章　完备度量空间

Cauchy序列(Cauchy sequences)

设X是度量空间，$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$是$X$中的一个序列，若对任何$\varepsilon>0$，

$$\text{有 } n_0\in\mathbf{N} \quad \text{使当 } n, m>n_0 \Longrightarrow d(a_n, a_m)<\varepsilon$$

则称$\langle a_n\rangle$为一个**Cauchy 序列**(Cauchy sequence)。

因此，在X是赋范空间情况下，$\langle a_n\rangle$若满足：对任何$\varepsilon>0$，

$$\text{有 } n_0\in\mathbf{N} \quad \text{使当 } n, m>n_0 \Longrightarrow \|a_n-a_m\|<\varepsilon$$

则称$\langle a_n\rangle$为一个**Cauchy 序列**。

例 1.1　设$\langle a_n\rangle$是收敛序列；譬如说$a_n\to p$。则$\langle a_n\rangle$必是 Cauchy 序列，因为对任何$\varepsilon>0$

$$\text{有 } n_0\in\mathbf{N} \quad \text{使当 } n>n_0 \Longrightarrow d(a_n, p)<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

因此，由三角不等式得

$$n, m>n_0 \Longrightarrow d(a_n, a_m)\leqslant d(a_n, p)+d(a_m, p)$$

$$<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon,$$

换句话说，$\langle a_n\rangle$是 Cauchy 序列。

例 1.1 的结果可叙述成下列命题。

命题 14.1　每个度量空间中的收敛序列是 Cauchy 序列。

命题 14.1 的逆命题是不成立的，从以下例子看出。

例 1.2 设 $X=(0, 1)$赋以通常度量，则

$$\langle\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\rangle$$

是X中的 Cauchy 序列，但在X中不收敛。

例 1.3 设d是集X上的平凡度量，又设$\langle a_n\rangle$是(X, d)内的 Cauchy 序列。注意d用公式

$$d(a, b)=\begin{cases}0 & 若\ a=b\\ 1 & 若\ a\neq b\end{cases}$$

来定义。设$\varepsilon=\frac{1}{2}$，则因为$\langle a_n\rangle$是 Cauchy 序列，有$n_0\in\mathbf{N}$使当

$$n, m>n_0\Longrightarrow d(a_n, a_m)<\frac{1}{2}\Longrightarrow a_n=a_m。$$

换句话说，$\langle a_n\rangle$取形式$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n0}, p, p, p, \cdots\rangle$，即从某项开始为常数。

例 1.4 设$\langle p_1, p_2, \cdots\rangle$是$m$维欧氏空间$\mathbf{R}^m$的一个 Cauchy 序列；譬如说：

$$p_1=\langle a_1^{(1)}, \cdots, a_1^{(m)}\rangle, p_2=\langle a_2^{(1)}, \cdots, a_2^{(m)}\rangle, \cdots$$

$\langle p_n\rangle$向m个坐标空间的每一个所作的射影，即

$$\langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \cdots\rangle, \cdots\langle a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, a_3^{(m)}, \cdots\rangle \qquad (1)$$

对于给定的$\varepsilon>0$，它们都是$\mathbf{R}$内的 Cauchy 序列。因$\langle p_n\rangle$是 Cauchy 序列，故有$n_0\in\mathbf{N}$使当

$$r, s>n_0\Longrightarrow d(p_r, p_s)^2=|a_r^{(1)}-a_s^{(1)}|^2+\cdots+|a_r^{(m)}-a_s^{(m)}|^2<\varepsilon^2.$$

因此特别有

$$r, s>n_0\Longrightarrow|a_r^{(1)}-a_s^{(1)}|^2<\varepsilon^2, \cdots, |a_r^{(m)}-a_s^{(m)}|^2<\varepsilon^2。$$

换句话说，(1)中m个序列的每一个都是 Cauchy 序列。

完备度量空间(Complete metric spaces)

定义 度量空间(X, d)称为**完备的**(complete)是指X中的任一Cauchy序列$\langle a_n\rangle$都收敛于X中的某一点p。

例2.1 由Cauchy收敛定理知：实直线**R**赋以通常度量时是一个完备度量空间。

例2.2 设d为集X上的平凡度量。则(见例1.3)X中一个序列$\langle a_n\rangle$是Cauchy序列，当且仅当它取形式$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, p, p, p, \cdots\rangle$，显然它收敛于$p\in X$。所以平凡度量空间是完备的。

例2.3 单位开区间$X=(0, 1)$赋以通常度量时是不完备的。因为(见例1.2)X中的序列

$$\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\rangle$$

是Cauchy序列但是不收敛于X内的点。

注意 例2.1和例2.3说明完备性(completeness)不是一种拓扑性质：**R**与$(0, 1)$虽然同胚，但**R**完备而$(0, 1)$则不完备。

例2.4 m维欧氏空间$\mathbf{R}^m$是完备的。因为，设$\langle p_1, p_2, \cdots\rangle$是$\mathbf{R}^m$内Cauchy序列，其中

$$p_1=\langle a_1^{(1)}, \cdots, a_1^{(m)}\rangle,$$
$$p_2=\langle a_2^{(1)}, \cdots, a_2^{(m)}\rangle\cdots$$

则(见例1.4)$\langle p_n\rangle$到m个坐标空间内的射影都是Cauchy序列；并且因为**R**是完备的，它们都收敛：

$$\langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots\rangle\to b_1, \cdots, \langle a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \cdots\rangle\to b_m$$

于是$\langle p_n\rangle$收敛于点$q=\langle b_1, \cdots, b_m\rangle\in\mathbf{R}^m$，因为$m$个射影中的每一个收敛于$q$的射影(见定理12.7)。

闭集套原理(Principle of nested closed sets)

注意：

(1) 度量空间X中子集A的直径$d(A)$是指：

$$d(A)=\sup\{d(a,a'):\ a,a'\in A\}。$$

(2) 集列A_1, A_2, …称为一个**集套**是指：

$$A_1\supset A_2\supset\cdots。$$

下面的定理给出完备度量空间的一个特征，它和实直线上的区间套定理相似。

定理 14.2 度量空间X为完备的，当且仅当任何非空闭集套只要是这些集的直径趋于零都有非空的交。

换句话说，度量空间X为完备的，当且仅当若

$$A_1\supset A_2\supset\cdots$$

为X中的非空闭集套，且$\lim\limits_{n\to\infty}d(A_n)=0$，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\neq\varnothing$。

下面二例说明：在定理 14.2 中条件$\lim\limits_{n\to\infty}d(A_n)=0$及$A_n$都是闭集，两者都是不可少的。

例 3.1 设X为实直线$\mathbf{R}$，又设$A_n=[n,\infty)$，X是完备的，A_n也都闭，并且$A_1\supset A_2\supset\cdots$。但$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，原因是$\lim\limits_{n\to\infty}d(A_n)\neq 0$。

例 3.2 设X为实直线$\mathbf{R}$，又设$A_n=(0,1/n]$，则X完备，$A_1\supset A_2\supset\cdots$并且$\lim\limits_{n\to\infty}d(A_n)=0$。但

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing,$$

原因是A_n不闭。

完备性与压缩映照（Completeness and contracting mappings）

设X为度量空间，已给函数 $f: X\to X$，若有实数 α 存在，$0\leqslant\alpha<1$，使得对任何 $p, q\in X$ 有：

$$d(f(p), f(q))\leqslant \alpha d(p, q)<d(p, q)$$

则此函数 $f: X\to X$ 称为一个**压缩映照**（contracting mapping）。

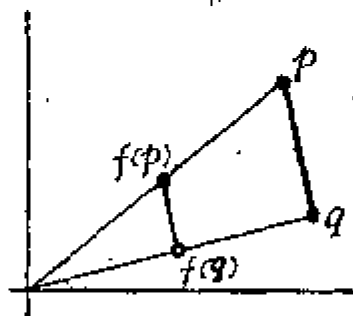
于是在压缩映照中，任何两点的映象之间的距离小于两点之间的距离。

例 4.1 设f是二维欧氏空间$\mathbf{R}^2$上的一个函数，即 $f: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，它由公式$f(p)=\frac{1}{2}p$定义。则$f$是压缩映照，因

$$d(f(p), f(q))=\|f(p)-f(q)\|=\|\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\|$$

$$=\frac{1}{2}\|p-q\|=\frac{1}{2}d(p, q)。$$

当X为完备度量空间时，有下面的“不动点”定理。它在分析学中有许多应用。



定理 14.3 设f为完备度量空间X上的一个压缩映照，则有唯一的$p\in X$，使 $f(p)=p$。

完备化（Completions）

度量空间 X^* 称为是度量空间X的一个**完备化是指**：

X^* 是完备的，并且X等距于 (isometric to) X^* 的一个稠密子集。

例 5.1 实数集 $\mathbf{R}$ 是有理数集 $\mathbf{Q}$ 的一个完备化，因为 $\mathbf{R}$ 是完备的并且 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个稠密子集。

现在我们提出将任何度量空间X完备化的一个具体方法。

令 $C[X]$ 表示X中一切 Cauchy 序列所成的簇，并令$\sim$为 $C[X]$ 中的一种关系，其定义如下：

$$\langle a_n\rangle\sim\langle b_n\rangle \quad \text{iff} \quad \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)=0$$

意思就是说，我们用"$\sim$"把那些"应当"有相同"极限"的 Cauchy 序列看成是等同的。

引理 14.4 关系$\sim$是 $C[X]$ 中的一种等价关系。

现在令 X^* 表示商集 $C[X]/\sim$，即 X^* 由 $C[X]$ 中 Cauchy 序列 $\langle a_n\rangle$ 的等价类 $[\langle a_n\rangle]$ 所组成。设 e 是由公式

$$e([\langle a_n\rangle], [\langle b_n\rangle])=\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$$

定义的一个函数，其中$[\langle a_n\rangle]$，$[\langle b_n\rangle]\in X^*$。

引理 14.5 函数 e 的定义是合理的 (well-defined) 即：若

$$\langle a_n\rangle\sim\langle a_n^*\rangle, \ \langle b_n\rangle\sim\langle b_n^*\rangle, \ \text{则}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)=\lim_{n\to\infty} d(a_n^*, b_n^*)$$

换句话说，e 的值不依赖于等价类中的代表元素 Cauchy 序列的选择，另外，有：

引理 14.6 函数 e 是 X^* 上的一种度量。

现在，对每个 $p\in X$ 来说，序列$\langle p, p, p, \cdots\rangle\in C[X]$，即是 Cauchy 序列。令

$$\hat{p}=[\langle p, p, \cdots\rangle] \text{ 及 } \hat{X}=\{\hat{p}: p\in X\}$$

则 $\hat{X}$ 是 X^* 的一个子集。

引理 14.7 X 等距于 $\hat{X}$，且 $\hat{X}$ 在 X^* 中稠密。

引理 14.8 X^* 中的任何 Cauchy 序列都是收敛的，因此 X^* 是X的一个完备化。

最后我们有

引理 14.9 若 Y^* 也是X的一个完备化，则 Y^* 与 X^* 等距。

把以上诸引理综合起来就得到以下的基本定理：

定理 14.10 任何度量空间X都可以完备化，X 的所有的完备化都是互相等距的。

换句话说，除了相差一个等距映照外，任何度量空间有唯一的完备化。

Baire 纲定理（Baire's cadegory theorem）

注意： 拓扑空间X中的子集A称为在X中无处稠密，(nowhere dense)，是指A的闭包的内集是空集：

$$\mathrm{int}(\overline{A})=\varnothing。$$

例 6.1 整数集 $\mathbf{Z}$ 是实直线 $\mathbf{R}$ 的无处稠密子集。因 $\mathbf{Z}$ 是闭的，即 $\mathbf{Z}=\overline{\mathbf{Z}}$，并且它的内集是空集，因此

$$\mathrm{int}(\overline{\mathbf{Z}})=\mathrm{int}(\mathbf{Z})=\varnothing,$$

类似地，$\mathbf{R}$ 中的任何有限子集都在 $\mathbf{R}$ 内无处稠密。

另一方面，有理数集 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 内不是无处稠密的，因 $\mathbf{Q}$ 的闭包是 $\mathbf{R}$，因而

$$\mathrm{int}(\overline{\mathbf{Q}})=\mathrm{int}(\mathbf{R})=\mathbf{R}\neq\varnothing。$$

一个拓扑空间X若是它的可数个无处稠密子集之并，则称为是**第一纲的**（first category）拓扑空间（或稀疏的）（meager, thin）。若X不是第一纲的，就称为是**第二纲的**

(second category)(或浓密的)(non-meager, thick)。

例 6.2 有理数集 **Q** 是第一纲的，因为 **Q** 中每个单元素集$\{p\}$都在 **Q** 内无处稠密，而 **Q** 是可数个单元素集之并。

鉴于下述 Baire 纲定理实直线 **R** 是第二纲的。

定理 14.11 (Baire) 任何完备度量空间X都是第二纲的。

完备与致密(Completeness and compactness)

设A为度量空间X中的一个子集，则A紧致，当且仅当A列紧，而所谓列紧是指：A中的任何序列$\langle a_n\rangle$必有一收敛的子序列$\langle a_{i_n}\rangle$。但由例 1.1，$\langle a_{i_n}\rangle$是一个 Cauchy 序列。因此完备性概念同紧致性概念以及与紧致性概念密切相关的完全有界性概念之间应当有一定的关系。

我们叙述两个这样的关系：

定理 14.12 度量空间X为紧致，当且仅当它是完备且完全有界的。

定理 14.13 设X为完备度量空间。则$A\subset X$为紧致，当且仅当它是闭且完全有界的。

实数集的构造(Construction of the real numbers)

实数集可以由有理数集出发利用本章叙述的方法来构造。特别是，设 **Q** 是有理数集，又设 **R** 是 **Q** 内 Cauchy 序列的等价类簇：

$$\mathbf{R}\{[\langle a_n\rangle]: \langle a_n\rangle \text{ 是 } \mathbf{Q} \text{ 内的 Cauchy 序列}\}$$

现在 **R** 配上适当的度量就是一个完备度量空间。

注意 设X是一个赋范向量空间，则由本章所说的完备化步

骤可得一完备度量空间 X^*。然后在 X^* 中用下列式子定义向量加法、数乘法、范数：

(i) $[\langle a_n\rangle]+[\langle b_n\rangle]\equiv[\langle a_n+b_n\rangle]$。

(ii) $k[\langle a_n\rangle]\equiv[\langle ka_n\rangle]$。

(iii) $\|[\langle a_n\rangle]\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|a_n\|$。

便得到一个完备的赋范向量空间，它称为一个 **Banach** 空间。

习 题 解 答

Cauchy 序列

1．求证度量空间 X 中任何 Cauchy 序列 $\langle a_n\rangle$ 都是完全有界的（因此也是有界的）。

解：设 $\varepsilon>0$，我们要证存在将 $\{a_n\}$ 分成有限个集的一种分解，使这有限个集中每一个直径都小于 ε。因为 $\langle a_n\rangle$ 是一个 Cauchy 序列，所以有 $n_0\in\mathbf{N}$，使得

$$n,\ m>n_0\Longrightarrow d(a_n,\ a_m)<\varepsilon$$

从而，$B=\{a_{n_0+1},\ a_{n_0+2},\ \cdots\}$ 的直径最大为 ε。于是 $\{a_1\}$，$\cdots$，$\{a_{n_0}\}$，B 是将 $\{a_n\}$ 分成有限个集的一种分解，其中每个集的直径小于 ε，因而 $\{a_n\}$ 是完全有界的。

2．设 $\langle a_1,\ a_2,\ \cdots\rangle$ 为度量空间 X 中的一个序列，令

$A_1=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$，$A_2=\{a_2,\ a_3,\ \cdots\}$，

$A_3=\{a_3,\ a_4,\ \cdots\}$，$\cdots$

求证：$\langle a_n\rangle$ 为 Cauchy 序列，当且仅当 A_n 的直径趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}d(A_n)=0。$$

解：假设 $\langle a_n\rangle$ 是一个 Cauchy 序列。设 $\varepsilon>0$，则

有 $n_0 \in \mathbf{N}$　使得 $n, m > n_0 \Longrightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon$

从而，$n > n_0 \Longrightarrow d(A_n) < \varepsilon$　因而 $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$。

另一方面，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$。设 $\varepsilon > 0$，则

有 $n_0 \in \mathbf{N}$　使得 $d(A_{n_0+1}) < \varepsilon$，

因此　$n, m > n_0 \Longrightarrow a_n, a_m \in A_{n_0+1} \Longrightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon$，因而 $\langle a_n \rangle$ 是 Cauchy 序列。

3．设 $\langle a_1, a_2 \cdots \rangle$ 是 X 中的 Cauchy 序列；$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots \rangle$ 为 $\langle a_n \rangle$ 的一个子列，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0$。

解：设 $\varepsilon > 0$。因 $\langle a_n \rangle$ 是 Cauchy 序列，故

有 $n_0 \in \mathbf{N}$　使得 $n, m > n_0 - 1 \Longrightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon$

现在 $i_{n_0} \geqslant n_0 > n_0 - 1$ 因此 $d(a_{n_0}, a_{i_{n_0}}) < \varepsilon$。换句话说，

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0。$$

4．设 $\langle a_1, a_2, \cdots \rangle$ 为 X 中的 Cauchy 序列；又设 $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots \rangle$ 为 $\langle a_n \rangle$ 的一个收敛于 $p \in X$ 的子列。求证：$\langle a_n \rangle$ 也收敛于 p。

解：由三角不等式，$d(a_n, p) \leqslant d(a_n, a_{i_n}) + d(a_{i_n}, p)$，因此

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, p) \leqslant \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{i_n}) + \lim_{n\to\infty} d(a_{i_n}, p)$$

因 $a_{i_n} \to p$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_{i_n}, p) = 0$，由上一习题得

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0，则$$

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, p) = 0 \quad 因而 \quad a_n \to p。$$

5．设 $\langle b_1, b_2, \cdots \rangle$ 为度量空间 X 中的一个 Cauchy 序列。$\langle a_1, a_2, \cdots \rangle$ 为 X 中的一个序列，使 $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$ 对于

每个 n 都成立。

（i）求证 $\langle a_n\rangle$ 也是X中的一个 Cauchy 序列。

（ii）求证 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 $p\in X$，当且仅当 $\langle b_n\rangle$ 收敛于 p。

解：(i) 由三角不等式：

$$d(a_m,\ a_n)\leqslant d(a_m,\ b_m)+d(b_m,\ b_n)+d(b_n,\ a_n)$$

设 $\varepsilon>0$，则有 $n_1\in\mathbf{N}$ 使得 $\dfrac{1}{n_1}<\dfrac{\varepsilon}{3}$。因此

$$n,\ m>n_1\Longrightarrow d(a_m,\ a_n)<\varepsilon/3+d(b_m,\ b_n)+\varepsilon/3$$

由假设，$\langle b_1,\ b_2,\ \cdots\rangle$是一个 Cauchy 序列；因此

有 $n_2\in\mathbf{N}$ 使得 $n,\ m>n_2\Longrightarrow d(b_m,\ b_n)>\varepsilon/3$

令 $n_0=\max\{n_1,\ n_2\}$，则

$$n,\ m>n_0\Longrightarrow d(a_m,\ a_n)<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$$

于是 $\langle a_n\rangle$ 是一个 Cauchy 序列。

(ii) 由三角不等式：$d(b_n,\ p)\leqslant d(b_n,\ a_n)+d(a_n,\ p)$；因此

$$\lim_{n\to\infty}d(b_n,\ p)\leqslant\lim_{n\to\infty}(d_n,\ a_n)+\lim_{n\to\infty}d(a_n,\ p)$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}d(b_n,\ a_n)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)=0$。因而，若 $a_n\to p$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}d(b_n,\ p)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}d(a_n,\ p)=0$，因而 $\langle b_n\rangle$ 也收敛于 p。

同理，若 $b_n\to p$ 则 $a_n\to p$。

完备空间

6．求证定理14.2：下列命题是等价的：(i) X 是完备度量空间，(ii) 任何一列非空的闭集套只要它们的直径趋于零就有一非空的交。

解：(i)$\Longrightarrow$(ii)：

设 $A_1\supset A_2\supset\cdots$ 是X的非空闭集套，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}d(A_n)=0$。我们要证 $\bigcap\limits_n A_n\neq\varnothing$。因为每个 A_i 非空，我们可以选一个序列

$$\langle a_1, a_2, \cdots\rangle \quad 使得 \quad a_1\in A_1, a_2\in A_2, \cdots$$

我们易证 $\langle a_n\rangle$ 是 Cauchy 序列。设 $\varepsilon>0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}d(A_n)=0$，故

$$有\ n_0\in\mathbf{N} \quad 使得 \quad d(A_{n_0})<\varepsilon$$

但是 A_i 是闭集套；因此

$$n, m>n_0 \Longrightarrow A_n, A_m\subset A_{n_0} \Longrightarrow a_n, a_m\in A_{n_0}$$
$$\Longrightarrow d(a_n, a_m)<\varepsilon$$

于是 $\langle a_n\rangle$ 是 Cauchy 序列。

现在X是完备的，因而 $\langle a_n\rangle$ 收敛于譬如说 $p\in X$。易知 $p\in\bigcap\limits_n A_n$。假设不是这样，即假设

$$有\ k\in\mathbf{N} \quad 使得 \quad p\notin A_k$$

因 A_k 是一个闭集，故 p 与 A_k 之间的距离不是零；譬如说，$d(p, A_k)=\delta>0$，则 A_k 和开球 $S=S\left(p, \frac{1}{2}\delta\right)$ 是互斥的。因此

$$n>k \Longrightarrow a_n\in A_k \Longrightarrow a_n\notin S\left(p, \frac{1}{2}\delta\right)$$

而这是不可能的，因为 $a_n\to p$。换句话说，$p\in\bigcap\limits_n A_n$ 因而 $\bigcap\limits_n A_n$ 是非空的。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：

设 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 是X中的 Cauchy 序列，我们要证$\langle a_n\rangle$收敛。为此，设

$$A_1=\{a_1, a_2, \cdots\}, \quad A_2=\{a_2, a_3, \cdots\}, \cdots$$

即 $A_k=\{a_n: n\geqslant k\}$。则 $A_1\supset A_2\supset\cdots$且由习题 2，知

$$\lim_{n\to\infty} d(A_n)=0。$$

此外，因为 $d(\overline{A})=d(A)$，其中 $\overline{A}$ 为 A 的闭包，$\overline{A_1}\supset\overline{A_2}\supset\cdots$ 是直径趋于零的非空闭集序列。因此由假设，$\bigcap_n\overline{A_n}\neq\varnothing$；譬如说 $p\in\bigcap_n\overline{A_n}$。易证 Cauchy 列 $\langle a_n\rangle$ 收敛于 p。

设 $\varepsilon>0$。因 $\lim_{n\to\infty}d(\overline{A})=0$，故有

$$n_0\in\mathbf{N} \quad 使得 \quad d(\overline{A_{n_0}})<\varepsilon$$

因而 $$n>n_0\Longrightarrow a_n,\ p\in\overline{A_{n_0}}\Longrightarrow d(a_n,\ p)<\varepsilon$$

换句话说，$\langle a_n\rangle$ 收敛于 p。

7．设 X 为度量空间，$f: X\to X$ 为 X 上的压缩映照，即有 $\alpha\in\mathbf{R}$, $0\leqslant\alpha<1$，使得对于任何 $p,q\in X$，都有

$$d(f(p),f(q))\leqslant\alpha d(p,q)。$$

求证：f 是连续的。

解：我们来证在每一点 $x_0\in X$ 处，f 是连续的。设 $\varepsilon>0$，则

$$d(x,x_0)<\varepsilon\Longrightarrow d(f(x),f(x_0))\leqslant\alpha d(x,x_0)\leqslant\alpha\varepsilon<\varepsilon$$

因而 f 是连续的。

8．求证定理 14.3：若 f 是完备度量空间 X 上的压缩映照：

$$d(f(a),f(b))\leqslant\alpha d(a,b),\quad 0\leqslant\alpha<1$$

则有唯一的 $p\in X$ 存在，使 $f(p)=p$。

解：设任取一点 $a_0\in X$，令

$$a_1=f(a_0),\ a_2=f(a_1)=f^2(a_0),\ \cdots,$$

$$a_n=f(a_{n-1})=f^n(a_0),\ \cdots$$

易证 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 是 Cauchy 序列。首先注意：

$$d(f^{s+t}(a_0), f^t(a_0)) \leqslant \alpha d(f^{s+t-1}(a_0), f^{t-1}(a_0)) \leqslant \cdots$$
$$\leqslant \alpha^t d(f^s(a_0), a_0)$$
$$\leqslant \alpha^t[d(a_0, f(a_0)) + d(f(a_0), f^2(a_0)) + \cdots$$
$$+ d(f^{s-1}(a_0), f^s(a_0))]$$

但是 $d(f^{i+1}(a_0), f^i(a_0)) \leqslant \alpha^i d(f(a_0), a_0)$，因而

$$d(f^{s+t}(a_0), f^t(a_0)) \leqslant \alpha^t d(f(a_0), a_0)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots$$
$$+\alpha^{s-1}) \leqslant \alpha^t d(f(a_0), a_0)[1/(1-\alpha)]$$

因为 $(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{s-1}) \leqslant 1/(1-\alpha)$。

现在设 $\varepsilon>0$，令

$$\delta = \begin{cases} \varepsilon(1-\alpha) & \text{若} \quad d(f(a_0), a_0)=0 \\ \varepsilon(1-\alpha)/d(f(a_0), a_0) & \text{若} \quad d(f(a_0), a_0) \neq 0 \end{cases}$$

因 $\alpha<1$，故

有 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得 $\alpha^{n_0}<\delta$

因此若 $r \geqslant s > n_0$，

$$d(a_s, a_r) \leqslant \alpha^s[1/(1-\alpha)]d(f(a_0), a_0)$$
$$<\delta[1/(1-\alpha)]d(f(a_0), a_0) \leqslant \varepsilon。$$

因而 $\langle a_n\rangle$ 是 Cauchy 序列。

现在 X 是完备的，因而 $\langle a_n\rangle$ 收敛于譬如说 $p \in X$，易证 $f(p)=p$，因 f 是连续的因此是序列连续的，所以

$$f(p) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = p。$$

最后，我们来证 p 是唯一的。假设 $f(p)=p$ 及

$$f(q)=q;$$

则 $$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leqslant \alpha d(p, q)$$

但是 $\alpha<1$，因此 $d(p, q)=0$，即 $p=q$。

9．求证：$\langle a_n\rangle\sim\langle b_n\rangle$，当且仅当它们同为某一 Cauchy 序列的子列。

解：假设 $\langle a_n\rangle\sim\langle b_n\rangle$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}d(a_n, b_n)=0$。$\langle c_n\rangle$ 用

$$c_n=\begin{cases}a_{n/2} & \text{若 } n \text{ 为偶数}\\ b_{(n+1)/2} & \text{若 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

来定义。于是 $\langle c_n\rangle=\langle b_1, a_1, b_2, a_2, \cdots\rangle$。易证 $\langle c_n\rangle$是 Cauchy 序列。因为，设 $\varepsilon>0$；现在

$$\text{有 } n_1\in\mathbf{N} \quad \text{使得} \quad m, n>n_1\Longrightarrow d(a_m, a_n)<\frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\text{有 } n_2\in\mathbf{N} \quad \text{使得} \quad m, n>n_2\Longrightarrow d(b_m, b_n)<\frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\text{有 } n_3\in\mathbf{N} \quad \text{使得} \quad n>n_3\Longrightarrow d(a_n, b_n)<\frac{1}{2}\varepsilon$$

令 $n_0=\max(n_1, n_2, n_3)$。易证

$$m, n>2n_0\Longrightarrow d(c_m, c_n)<\varepsilon$$

注意 $\quad m>2n_0\Longrightarrow\frac{1}{2}m>n_1, n_3;\ \frac{1}{2}(m+1)>n_2, n_3$

于是 $\quad m, n$ 为偶数 $\Longrightarrow c_m=a_{\frac{1}{2}m}$,

$$c_n=a_{\frac{1}{2}n}\Longrightarrow d(c_m, c_n)<\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$$

m, n 为奇数 $\Longrightarrow c_m=a_{\frac{1}{2}(m+1)}$, $c_n=b_{\frac{1}{2}(n+1)}$

$$\Longrightarrow d(c_m, c_n)<\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$$

m 为偶数，n 为奇数 $\Longrightarrow c_m = a_{\frac{1}{2}m}$，$c_n = b_{\frac{1}{2}(n+1)} \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
d(c_m, c_n) &\leqslant d(a_{\frac{1}{2}m}, b_{\frac{1}{2}m}) \\
&\quad + d(b_{\frac{1}{2}m}, b_{\frac{1}{2}(n+1)}) \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}
$$

因而 $\langle c_n \rangle$ 是 Cauchy 序列。

反之，若有 Cauchy 序列 $\langle a_n \rangle$，它满足 $\langle a_n \rangle = \langle c_{j_n} \rangle$ 及 $\langle b_n \rangle = \langle c_{k_n} \rangle$，则

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} d(c_{j_n}, c_{k_n}) = 0$$

因为 $\langle c_n \rangle$ 是 Cauchy 序列及 $n\to\infty$ 也就是 $j_n, k_n \to \infty$。

10. 求证引理14.5：函数 e 定义是合理的，即若 $\langle a_n \rangle \sim \langle a_n^* \rangle$，$\langle b_n \rangle \sim \langle b_n^* \rangle$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n^*, b_n^*)$。

解：令 $r = \lim d(a_n, b_n)$ 及 $r^* = \lim d(a_n^*, b_n^*)$，又设 $\varepsilon > 0$。注意

$$d(a_n, b_n) \leqslant d(a_n, a_n^*) + d(a_n^*, b_n^*) + d(b_n^*, b_n)$$

现在　有 $n_1 \in \mathbf{N}$　使得　$n > n_1 \Longrightarrow d(a_n, a_n^*) < \varepsilon/3$

　　　有 $n_2 \in \mathbf{N}$　使得　$n > n_2 \Longrightarrow d(b_n, b_n^*) < \varepsilon/3$

　　　有 $n_3 \in \mathbf{N}$　使得　$n > n_3 \Longrightarrow |d(a_n^*, b_n^*) - r^*| < \varepsilon/3$

从而，若 $n > \max(n_1, n_2, n_3)$，则

$d(a_n, b_n) < r^* + \varepsilon$ 因而 $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = r \leqslant r^* + \varepsilon$。

但这个不等式对任何 $\varepsilon > 0$ 都是成立的，因此 $r \leqslant r^*$。

用同样方法我们可证 $r^* \leqslant r$，因此 $r = r^*$。

11. 设 $\langle a_n \rangle$ 是 X 中的 Cauchy 序列。求证：$a = [\langle a_n \rangle] \in X^*$ 是 $\hat{X}$ 中的序列 $\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots \rangle$ 的极限。

（这里 $\hat{X}=\{\hat{p}=[\langle p, p, p, \cdots\rangle]; p\in X\}$）

解：因 $\langle a_n\rangle$ 是X中的 Cauchy 序列，故

$$\lim_{m\to\infty} e(\hat{a}_m, a)=\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} d(a_m, a_n))=\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} d(a_m, a_n)=0$$

从而，$\langle\hat{a}_n\rangle\to a$。

12. 求证引理 14.7：X 等距于 $\hat{X}$；$\hat{X}$ 在 X^* 中稠密。

解：(1) 对于每对 $p, q\in X$，有：

$$e(\hat{p}, \hat{q})=\lim_{n\to\infty} d(p, q)=d(p, q)$$

故X等距于 $\hat{X}$。

(2) 为证$\hat{X}$在 X^* 中稠密，只要证 X^* 中任何一点都是$\hat{X}$中某一序列的极限。设 $a=[\langle a_1, a_2, \cdots\rangle]$ 是 X^* 中的任何一点，则 $\langle a_n\rangle$ 是X中的 Cauchy 序列，因而由上一习题，a 是$\hat{X}$中的序列 $\langle\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots\rangle$ 的极限。于是$\hat{X}$在 X^* 中稠密。

13. 求证引理 14.8：(X_*, e) 中的每个 Cauchy 序列都收敛，因此(X^*, e)是X的一个完备化。

解：设 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$为 X^* 中的一个 Cauchy 序列。因为$\hat{X}$在 X^* 中稠密，故对每个 $n\in\mathbf{N}$

$$\text{有 } \hat{a}_n\in\hat{X} \quad \text{使得} \quad e(\hat{a}_n, a_n)<\frac{1}{n}$$

则由习题 5，$\langle\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots\rangle$ 也是 Cauchy 序列并由习题 12 知，$\langle\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots\rangle$ 收敛于 $\beta=[\langle a_1, a_2, \cdots\rangle]\in X^*$。故由习题 5，$\langle a_n\rangle$也收敛于 β，因此(X^*, e)是完备的。

14. 求证引理 14.9：若 Y^* 是X的一个完备化，则 Y^* 等距于 X^*。

解：可以假定X是 Y^* 的一个子空间。于是，对于任一$p\in Y^*$，存在X中的一个序列 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 收敛于 p，特别

是，$\langle a_n\rangle$ 是一个 Cauchy 序列。令 $f: Y^* \to X^*$ 定义如下：

$$f(p)=[\langle a_1, a_2, \cdots\rangle]$$

若X中的序列$\langle a_1^*, a_2^*, \cdots\rangle$也收敛于 p，则

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_n^*)=0 \quad 因而 \quad [\langle a_n\rangle]=[\langle a_n^*\rangle]$$

这说明 f 定义是合理的。

其次，f 是到上映照，因若 $[\langle b_1, b_2, \cdots\rangle]\in X^*$，则 $\langle b_1, b_2, \cdots\rangle$ 是X中的一个 Cauchy 序列，而 $X\subset Y^*$，因Y^*是完备的，故 $\langle b_n\rangle$ 收敛于譬如说 $q\in Y^*$。从而，

$$f(q)=[\langle b_n\rangle]。$$

现在设 $p, q\in Y^*$，同时譬如说X中的序列$\langle a_n\rangle$与$\langle b_n\rangle$分别收敛于 p 与 q，则

$$\begin{aligned} e(f(p), f(q)) &= e([\langle a_n\rangle], [\langle b_n\rangle]) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) \\ &= d(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n) \\ &= d(p, q) \end{aligned}$$

因此，f 是 Y^* 与 X^* 之间的等距映照。

Baire 纲定理

15．设N为X的一个无处稠密的子集，求证：$\overline{N}^c$ 在X中稠密。

解：假设 $\overline{N}^c$ 在X中不稠密，即有 $p\in X$ 及开集G使得

$$p\in G \quad 及 \quad G\cap\overline{N}^c=\varnothing$$

则 $p\in G\subset\overline{N}$因而 $p\in \operatorname{int}(\overline{N})$，但这是不可能的，因$N$在$X$中无处稠密，即 $\operatorname{int}(\overline{N})=\varnothing$。因此 $\overline{N}^c$在X中稠密。

16．设G是度量空间X的一个开集；又设N在X内无处

稠密。求证：有 $p\in X$ 及 $\delta>0$ 存在，使得 $S(p,\delta)\subset G$ 且 $S(p,\delta)\cap N=\varnothing$。

解：令 $H=G\cap\overline{N}^c$，则 $H\subset G$ 及 $H\cap N=\varnothing$。另外，因 G 是开集及 $\overline{N}^c$ 在 X 中稠密，故 H 是非空的，譬如说 $p\in H$。但因 G 及 $\overline{N}^c$ 都是开集，故 H 是开集。因此有 $\delta>0$ 使得 $S(p,\delta)\subset H$。因此 $S(p,\delta)\subset G$ 且 $S(p,\delta)\cap N=\varnothing$。

17．求证引理 14.11：完备度量空间是第二纲的。

解：设 $M\subset X$，又设 M 是第一纲的。我们要证 $M\neq X$，即：有 $p\in X$ 使 $p\notin M$。因为 M 是第一纲的，故

$$M=N_1\cup N_2\cup\cdots$$

其中每个 N_i 在 X 中是无处稠密的。

因 N_1 在 X 中无处稠密，故有 $a_1\in X$ 及 $\delta_1>0$ 使得

$$S(a_1,\delta_1)\cap N_1=\varnothing\text{。令 }\varepsilon_1=\delta_1/2\text{，则}$$

$$\overline{S(a_1,\varepsilon_1)}\cap N_1=\varnothing$$

现在 $S(a_1,\varepsilon_1)$ 是开的而 N_2 在 X 中无处稠密，因而由习题 16 知：

有 $a_2\in X$ 及 $\delta_2>0$ 使得 $S(a_2,\delta_2)\subset S(a_1,\varepsilon_1)\subset\overline{S(a_1,\varepsilon_1)}$ 并且 $S(a_2,\delta_2)\cap N_2=\varnothing$

令 $\varepsilon_2=\delta_2/2\leqslant\varepsilon_1/2=\delta_1/4$，则

$$\overline{S(a_2,\varepsilon_2)}\subset\overline{S(a_1,\varepsilon_1)}\quad\text{及}\quad\overline{S(a_2,\varepsilon_2)}\cap N_2=\varnothing$$

重复以上步骤，得到一列闭集套

$$\overline{S(a_1,\varepsilon_1)}\supset\overline{S(a_2,\varepsilon_2)}\supset\overline{S(a_3,\varepsilon_3)}\supset\cdots$$

使得对于每个 $n\in\mathbf{N}$，都有

$$\overline{S(a_n,\varepsilon_n)}\cap N_n=\varnothing\ \text{及}\ \varepsilon_n\leqslant\delta_1/2^n$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\delta_1/2^n=0$ 因而由定理 14.2 知：

$$\text{有 } p\in X \quad \text{使得} \quad p\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S(a_n, \varepsilon_n)}$$

此外对每个 $n\in\mathbf{N}$ 都有 $p\notin N_n$，因而 $p\notin M$。

完备性与致密性

18．求证：紧致度量空间 X 是完备的。

解： 设 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 是 X 中的 Cauchy 序列，则因 X 是紧致的故必定列紧，因此 $\langle a_n\rangle$ 必含一子列 $\langle a_{i1}, a_{i2}\cdots\rangle$ 收敛于譬如说 $p\in X$。但是由习题 4，$\langle a_n\rangle$ 也收敛于 p。因此 X 是完备的。

19．设 E 是度量空间 X 的一个完全有界的子集，求证：E 中每个序列 $\langle a_n\rangle$ 都含有 Cauchy 子列。

解： 因 E 完全有界，故可将 E 分解为有限个直径小于 $\varepsilon_1=1$ 的子集，则这些子集中至少有一个含有序列 $\langle a_n\rangle$ 中的无限多项，把这子集称为 A_1，因此

$$\text{有 } i_1\in\mathbf{N} \quad \text{使得} \quad a_{i_1}\in A_1$$

现在 A_1 是完全有界的，故又可将 A_1 分解为有限个直径小于 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$ 的子集，同理，这些子集中又至少有一个，称之为 A_2，它含有序列 $\langle a_n\rangle$ 的无限多项，因此

$$\text{有 } i_2\in\mathbf{N} \quad \text{使得} \quad i_2>i_1 \text{ 及 } a_{i_2}\in A_2$$

另外 $A_2\subset A_1$。

重复上述推理过程，得到一列集套

$$E\supset A_1\supset A_2\supset\cdots \quad \text{同时} \quad d(A_n)<1/n$$

及 $\langle a_n\rangle$ 的一个子序列 $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots\rangle$，其中 $a_{i_n}\in A_n$。易证 $\langle a_{i_n}\rangle$ 是一个 Cauchy 序列。因为设 $\varepsilon>0$，则

有 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得 $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ 因而 $d(A_{n_0}) < \varepsilon$

因此 $i_n, i_m > i_{n_0} \Longrightarrow a_{i_n}, a_{i_m} \in A_{n_0} \Longrightarrow d(a_{i_m}, a_{i_n}) < \varepsilon$。

20．求证定理 14.12：度量空间 X 为紧致，当且仅当 X 是完备的和完全有界的。

解：假设 X 是紧致的，则由习题 18，X 是完备的，又由引理 11.17 知，X 是完全有界的。

另一方面，假设 X 是完备的和完全有界的。设 $\langle a_1, a_2, \cdots\rangle$ 是 X 中的一个序列，则由上一习题，$\langle a_n\rangle$ 含有 Cauchy 子列 $\langle a_{i_n}\rangle$，又因 X 完备，故 $\langle a_{i_n}\rangle$ 在 X 中收敛。于是 X 是列紧的因而是紧致的。

21．求证定理 14.13：设 A 是完备度量空间 X 的一个子集，则下列命题等价：(i) A 是紧致的，(ii) A 是闭的同时又是完全有界的。

解：(i) $\Longrightarrow$ (ii)：若 A 为紧致，则由定理 11.5 及引理 11.17，A 是闭和完全有界的。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：反之，假设 A 是闭且完全有界的，则因完备空间中的闭集是完备的，故 A 是完备且完全有界的，因此由上一习题，A 是紧致的。

补　充　习　题

完备度量空间

22．设 (X, d) 是一个度量空间，又设 e 是由

$$e(a, b) = \min\{1, d(a, b)\}$$

所定义的 X 上的度量，求证 $\langle a_n\rangle$ 是 (X, d) 中的一个 Cauchy 序列，当且仅当 $\langle a_n\rangle$ 是 (X, e) 中的一个 Cauchy 序列。

23. 求证：每一有限的度量空间是完备的。

24. 求证：完备度量空间的每一闭子空间是完备的。

25. 求证：Hilbert 空间（l_2-空间）是完备的。

26. 求证：设 $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$是定义于$X$上的赋予范数

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$$

的有界实值函数簇，则 $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$是完备的。

27. 求证：度量空间X是完备的，当且仅当X的每个无限的完全有界子集有一个聚点。

28. 求证：第一纲集的可数併是第一纲的。

29. 求证：度量空间X是完全有界的，当且仅当X中的每一序列包含一个 Cauchy 子列。

30. 求证：若X与Y是等距的，X又是完备的，则Y也是完备的。

杂题

31. 求证：每一赋范向量空间X可以稠密地嵌入到一个 Banach 空间，即完备的赋范向量空间（提示：见 383 页关于 Banach 空间的註）。

第十五章　函数空间

函数空间 (Function spaces)

设 X 与 Y 为任意二集，令 $\mathscr{F}(X, Y)$ 表示由 X 到 Y 的所有函数所成的簇。$\mathscr{F}(X, Y)$ 的任何一个子簇赋以某种拓扑 τ 时称为一个**函数空间**(function space)。

可以使函数簇 $\mathscr{F}(X, Y)$ 等同于一个积集，其方法如下：令 Y_x 为以 $x\in X$ 为附标的 Y 的一个拷贝，令 $\mathbf{F}$ 表示所有这些集 Y_x 的积，即：

$$\mathbf{F}=\prod\{Y_x:\ x\in X\},$$

则 $\mathbf{F}$ 是由所有这样的点 $p=\langle a_x:\ x\in X\rangle$ 所构成，点 p 对每点 $x\in X$ 规定了元素 $a_x\in Y_x=Y$ 与之对应。因此 $\mathbf{F}$ 也就是由所有由 X 到 Y 的函数所组成，故 $\mathbf{F}=\mathscr{F}(X, Y)$。

对于每个 $x\in X$，用公式

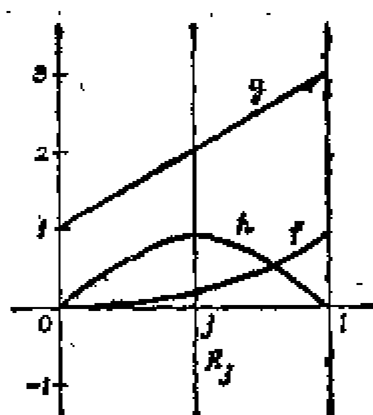
$$e_x(f)=f(x)$$

所定义的函数 e_x: $\mathscr{F}(X, Y)\to Y$ 称为在 x 处的**赋值函数**(evaluation mapping)(这里 f 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 中的任意函数，即 f: $X\to Y$)。

根据上述 $\mathscr{F}(X, Y)$ 与 $\mathbf{F}$ 的等同，可以知道，赋值函数 e_x 恰好就是由 $\mathbf{F}$ 向坐标空间 $Y_x=Y$ 的射影 π_x。

例 1.1　设 $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ 是定义在 $I=[0, 1]$ 上的所有实值函数所成的簇，令 $f, g, h\in\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ 是这三个函数：

$$f(x)=x^2$$
$$g(x)=2x+1$$
$$h(x)=\sin \pi x,$$



考察在

$$j=\frac{1}{2}$$

处的赋值函数

$$e_j: \mathscr{F}(I, \mathbf{R}) \to \mathbf{R},$$

则
$$e_j(f)=f(j)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$
$$e_j(g)=g(j)=g\left(\frac{1}{2}\right)=2$$
$$e_j(h)=h(j)=h\left(\frac{1}{2}\right)=1。$$

从图形上看，$e_j(f)$，$e_j(g)$ 及 $e_j(h)$ 是 f，g 及 h 的图形与通过点 $x=j$ 的垂直直线 R_j 的交点。

点开拓扑 (Point open topology)

设 X 为任一集，又设 Y 为一拓扑空间。首先考察 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的积拓扑 τ，这时，如上所述，认为函数簇 $\mathscr{F}(X, Y)$ 和积集 $\mathbf{F}=\prod\{Y_x: x\in X\}$ 是等同的。注意：$\mathbf{F}$ 上的积拓扑的定义准基 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathbf{F}$ 中形如

$$\pi_{x_0}^{-1}[G]=\{f: \pi_{x_0}(f)\in G\}$$

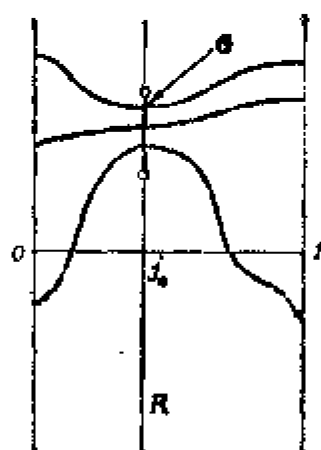
的一切集所构成，其中 $x_0\in X$，G 是坐标空间 $Y_{x_0}=Y$ 中的一个开集。但 $\pi_{x_0}(f)=e_{x_0}(f)=f(x_0)$，其中 e_{x_0} 是 $x_0\in X$ 处的赋值函数。因此，$\mathscr{F}(X, Y)$ 上的积拓扑 τ 的定义准基 $\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{F}(X, Y)$ 中形如 $\{f: f(x_0)\in G\}$ 的一切子集所构

成。$\{f: f(x_0)\in G\}$ 的含义就是：把任意点 $x_0\in X$ 映照到 Y 的一个任意开集 G 中去的这种函数全体。我们把 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的这种拓扑就称为**点开拓扑**(point open topology)。

换句话说，我们也可以把 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的点开拓扑定义为使赋值函数 e_x: $\mathscr{F}(X, Y)\to Y$ 为连续的 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的最粗拓扑，这个定义恰好与积拓扑的定义相符合。

例 2.1 设 τ 是 $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ 上的点开拓扑，其中 $I=[0, 1]$。与上面一样，τ 的定义准基中的元素形式如下：

$$\{f: f(j_0)\in G\},$$



其中 $j_0\in I$，而 G 是 $\mathbf{R}$ 中的一个开集。从图形上看，上面的准基元素由所有经过开集 G 的函数所组成，G 是通过水平轴上一点 j_0 的垂直直线 $\mathbf{R}$ 上的一个开集。注意这是等同于第十二章中所说的积空间

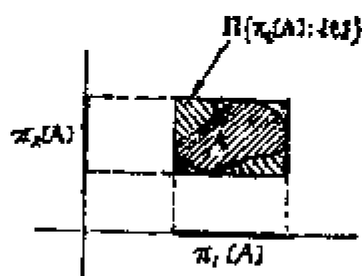
$$X=\prod\{R_i: i\in I\}$$

的定义准基元素的。

例 2.2 若 A 是积空间 $\prod\{X_i: i\in I\}$ 的一个子集，则 A 是它的一切射影之积的子集，即：

$$A\subset\prod\{\pi_i[A]: i\in I\}$$

(如图所示)。



于是

$$A\subset\prod\{\overline{\pi_i[A]}: i\in I\},$$

其中 $\overline{\pi_i[A]}$ 是 $\pi_i[A]$ 的闭包。从而，若 $\mathscr{A}=\mathscr{A}(X, Y)$ 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 的一个子簇，则

$$\mathscr{A}\subset\prod\{\overline{\pi_x[\mathscr{A}]}: x\in X\}=\prod\{\overline{e_x[\mathscr{A}]}: x\in X\}$$

且 $\overline{e_x[\mathscr{A}]}=\overline{\{f(x): f\in\mathscr{A}\}}$。由 Tychonoff 积定理，若

$\overline{\{f(x):\ f\in\mathscr{A}\}}$ 对每点 $x\in X$ 来说是紧致的，则 $\prod\{\overline{\pi_x[\mathscr{A}]}:\ x\in X\}$ 是积空间 $\prod\{Y_x:\ x\in X\}$ 的紧致子集。

注意：紧致集的任何闭子集也是紧致的。因此例 2.2 的结果也就是：

定理 15.1 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 的一个子簇，若对 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的点开拓扑来说，有：

（i）$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 的闭子集，

（ii）对于每个 $x\in X$，$\overline{\{f(x):\ f\in\mathscr{A}\}}$ 是 Y 中的紧致集，则 $\mathscr{A}$ 是紧致的（相对于点开拓扑来说）。

当 Y 是 Hausdorff 空间时，有下面更强的结论：

定理 15.2 设 Y 为 Hausdorff 空间，又设 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}(X, Y)$。则在点开拓扑下，$\mathscr{A}$ 为紧致的充要条件是 $\mathscr{A}$ 为闭集同时对每个 $x\in X$ 来说 $\overline{\{f(x):\ f\in\mathscr{A}\}}$ 是紧致的。

逐点收敛性(Pointwise convergence)

设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 为由集 X 到拓扑空间 Y 的函数列，若对每一点 $x_0\in X$，$\langle f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots\rangle$ 收敛于 $g(x_0)$，即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=g(x_0)。$$

其中 g 是由 X 到 Y 的一个函数，则称函数列 $\langle f_n\rangle$ **逐点收敛**于函数 g：$X\to Y$ (point wise)。特别是，当 Y 是度量空间时，则 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于 g 的充要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$ 及 $x_0\in X$，有

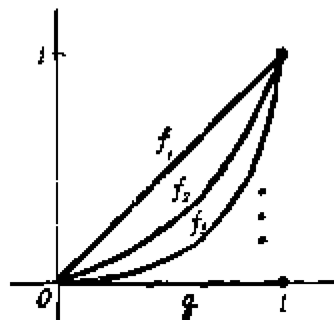
$$n_0=n_0(x_0, \varepsilon)\in\mathbf{N} \quad 使 \quad n>n_0\Longrightarrow d(f_n(x_0), g(x_0))<\varepsilon。$$

注意：n_0 依赖于 ε，也依赖于 x_0。

例 8.1 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是从 $I=[0, 1]$ 到 $\mathbf{R}$ 内定义为

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2,\ f_3(x)=x^3,\ \cdots$$

的函数列。则 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于定义为



$$g(x)=\begin{cases}0 & 若\quad 0\leq x<1\\ 1 & 若\quad x=1\end{cases}$$

的函数 g: $I\to\mathbf{R}$。注意虽然每个函数 f_i 都是连续的，但是极限函数 g 是不连续的。

逐点收敛与点开拓扑之间的关系如下：

定理 15.3 $\mathscr{F}(X,Y)$ 中的函数列 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 在 $\mathscr{F}(X,Y)$ 上的点开拓扑下收敛于 $g\in\mathscr{F}(X,Y)$，当且仅当函数列 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于 g。

由于上述定理，$\mathscr{F}(X,Y)$ 上的点开拓扑也叫做**逐点收敛拓扑** (topology of pointwise convergence)。

注意 注意可度量性不是不可数积下的不变性，因此定义在 [0, 1] 上的实值函数的逐点收敛拓扑不是度量拓扑。拓扑空间作为度量空间的推广，它的理论最早是从研究函数的逐点收敛性引起的。

一致收敛性 (Uniform convergence)

设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 为一列由集 X 到度量空间 (Y, d) 的函数，若有函数 g: $X\to Y$ 存在又对任何 $\varepsilon>0$，有

$$n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$$

使得 $\qquad n>n_0\Longrightarrow d(f_n(x), g(x))<\varepsilon,\quad \forall x\in X,$

则称函数列 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于函数 g: $X\to Y$。

特别有 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于 g; 那就是：一致收敛必逐点收敛。注意此地 n_0 只依赖于 ε，而在逐点收敛定义中 n_0 既依

赖于 ε 也依赖于点 x。

对 X 是拓扑空间时，有下面的古典结果：

命题 15.4 [⊙]设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 为一个由拓扑空间 X 到度量空间 Y 的连续函数列。若 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g: $X\to Y$，则 g 是连续函数。

例 4.1 设 $f_1, f_2, \cdots$ 是从 $I=[0, 1]$ 到 $\mathbf{R}$ 内的下列连续函数：

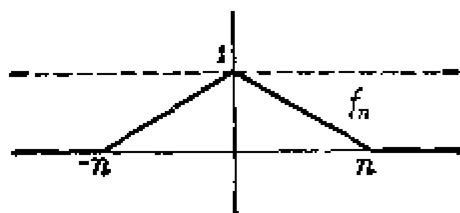
$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2,\ f_3(x)=x^3,\ \cdots$$

则由例 3.1，$\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于定义为：

$$g(x)=\begin{cases}0 & 若\quad 0\leqslant x<1\\ 1 & 若\quad x=1\end{cases}$$

的函数 g: $I\to\mathbf{R}$。因为 g 是不连续的，所以 $\langle f_n\rangle$ 不一致收敛于 g。

例 4.2 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是 $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 内的下列函数列：



$$f_n(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{n}|x|, & 若\quad |x|<n\\ 0, & 若\quad |x|\geqslant n,\end{cases}$$

则 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于常值函数 $g(x)=1$。但是 $\langle f_n\rangle$ 不一致收敛于 g。因为，设 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则对每个 $n\in\mathbf{N}$，有点 $x_0\in\mathbf{R}$ 存在使 $f_n(x_0)=0$ 因而 $|f_n(x_0)-g(x_0)|=1>\varepsilon$。

设 $\mathscr{B}(X, Y)$ 为由集 X 到度量空间 (Y, d) 的有界函数全体所成之簇，并设 e 为 $\mathscr{B}(X, Y)$ 上的度量，其定义如下：

$$e(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)):\ x \in X\}。$$

这个度量有下列性质：

定理 15.5 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 为 $\mathscr{B}(X, Y)$ 中一列函数，则 $\langle f_n\rangle$ 按度量 e 收敛于 $g\in\mathscr{B}(X, Y)$，当且仅当 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g。

由于上述定理，在 $\mathscr{B}(X, Y)$ 上由度量 e 所诱生的拓扑称为**一致收敛拓扑**(topology of uniform convergence)。

注意 定义在度量空间Y上的一致收敛概念不能作为一般的拓扑空间上的一致收敛概念。但是，一致收敛概念可以推广到一个空间簇，称之为**一致空间**(uniform spaces)，一致空间处在拓扑空间与度量空间之间。

函数空间C[0,1](The function space C[0,1])

由 $I=[0, 1]$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续函数全体所构成的向量空间 $C[0, 1]$ 赋以由

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|:\ x\in I\}$$

所定义的范数，是分析学中最重要的函数空间之一。注意上述范数诱生的是一致收敛拓扑。

因为 $I=[0, 1]$ 是紧致的，每个 $f\in C[0, 1]$ 是**一致连续**(uniformly continuous)的，那就是：

命题 15.6 设 f: $[0, 1]\to\mathbf{R}$ 是连续的，则对任何 $\varepsilon>0$，有 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得

$$|x_0-x_1|<\delta \Longrightarrow |f(x_0-f(x_1)|<\varepsilon$$

一致连续性（象一致收敛性一样）强于连续性，因为此地 δ 只依赖于 ε 而与特殊点无关。

命题 15.4 的一个推论是：

定题 15.7 $C[0, 1]$ 是完备的赋范向量空间。

对于完备的度量空间我们将利用 Baire 纲定理来证明下面的有趣结果：

命题 15.8 有连续函数 f: $[0, 1]\to\mathbf{R}$ 存在，它是处处不可导的。

注意 这里证明过的对于 $C[0, 1]$ 成立的所有结果对于闭区间$[a, b]$上连续函数全体组成的空间 $C[a, b]$ 也成立。

一致有界性(Uniform boundedness)

为了建立函数空间的子集为紧致的必要和充分条件，我们引入**一致有界和等度连续** (equicontinuity) 的概念，这些概念也有它们本身的重要性。

定义在集 X 上的一簇实值函数 $\mathscr{A}=\{f_i: X\to\mathbf{R}\}$ 称为**一致有界**(uniformly bounded)是指：

$$\text{有 } M\in\mathbf{R} \quad \text{使得} \quad |f(x)|\leqslant M,\ \forall f\in\mathscr{A},\ \forall x\in X,$$

那就是，每个函数 $f\in\mathscr{A}$ 是有界的并且有一个对所有函数公共的界。

特别地，若 $\mathscr{A}\subset C[0, 1]$，则一致有界性等于说：

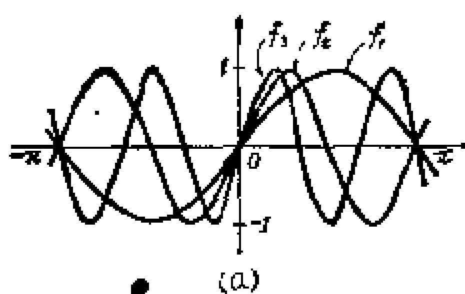
$$\text{有 } M\in\mathbf{R} \quad \text{使得} \quad \|f\|\leqslant M,\ \forall f\in\mathscr{A},$$

也就是说，$\mathscr{A}$ 是 $C[0, 1]$ 中的一个有界子集。

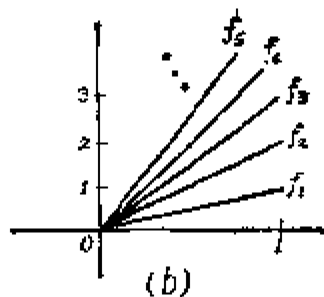
例 5.1 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 中的下列子集：

$$\mathscr{A}=\{f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\sin 2x,\ \cdots\},$$

则 $\mathscr{A}$ 是一致有界的。因为设 $M=1$，则对于每个 $f\in\mathscr{A}$ 和每个 $x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|\leqslant M$。见下图(a)。



(a)



(b)

例 5.2 设$\mathscr{A}\subset C[0,1]$，定义如下（见上图(b)）：

$$\mathscr{A}=\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=2x,\ f_3(x)=3x,\ \cdots\}。$$

虽然$C[0,1]$中每个函数，特别是在$\mathscr{A}$中每个函数是有界的，但是$\mathscr{A}$不是一致有界。因为若M是任一无论怎样大的实数，总有$n_0\in\mathbf{N}$存在使得$n_0>M$，因此$f_{n_0}(1)=n_0>M$。

等度连续(Equicontinuity)．Ascoli 定理

定义在任一度量空间X上的一簇实值函数

$$\mathscr{A}=\{f_i:\ X\to\mathbf{R}\}$$

称为**等度连续的**(equicontinuous)是指：对任何$\varepsilon>0$，

有$\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得

$$d(x_0,x_1)<\delta\Longrightarrow|f(x_0)-f(x_1)|<\varepsilon,\ \forall f\in\mathscr{A}。$$

注意：δ只依赖于ε而不依赖于任一特殊的点或特殊的函数。显然，每个$f\in\mathscr{A}$是一致连续的。

定理 15.9(Ascoli) 设$\mathscr{A}$为函数空间$C[0,1]$中的一个闭集，则$\mathscr{A}$为紧致，当且仅当$\mathscr{A}$为一致有界且等度连续。

紧致开拓扑(Compact open topology)

设X与Y为任意集，又设$A\subset X$，$B\subset Y$。我们用$F(A,B)$表示$\mathscr{F}(X,Y)$中那些把A映照到B中去的函数

全体，即：

$$F(A, B)=\{f\in\mathscr{F}(X, Y): f(A)\subset B\}。$$

例 6.1 设 $\mathfrak{S}$ 为 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的点开拓扑的定义准基，则 $\mathfrak{S}$ 中的元素（如我们所已知）具有以下形式：

$$\{f\in\mathscr{F}(X, Y): f(x)\in G\},$$

其中 $x\in X$, G 是 Y 中一个开集。按照上面的记号，这个集可表示为 $F(x, G)$，我们可将 $\mathfrak{S}$ 定义为

$$\mathfrak{S}=\{F(x, G): x\in X, G\subset Y \text{ 是开集}\}。$$

现在设 X, Y 都是拓扑空间，$\mathscr{A}$ 为 X 中的紧致集全体；$\mathscr{G}$ 为 Y 中的开集全体。$\mathscr{F}(X, Y)$ 上由

$$\mathfrak{S}=\{F(A, G): A\in\mathscr{A}, G\in\mathscr{G}\}$$

产生的拓扑 τ 称为 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的**紧致开拓扑** (compact open topology)，并且 $\mathfrak{S}$ 为 τ 的定义准基。

因为 X 中的单元素集是紧致集，所以 $\mathfrak{S}$ 包含了 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的点开拓扑的定义准基中的元素。因此有

定理 15.10 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的点开拓扑粗于 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的紧致开拓扑。

由于点开拓扑是使赋值函数连续的最粗拓扑，故得：

推论 15.11 相对于 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的紧致开拓扑来说，赋值函数 e_x: $\mathscr{F}(X, Y)\to Y$ 是连续的。

紧致收敛拓扑 (Topology of compact convergence)

设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 为由拓扑空间 X 到度量空间 (X, d) 的一个函数列。若有 g: $X\to Y$ 存在，使对 X 中的任何紧致子集 E 及任何 $\varepsilon>0$，有 $n_0=n_0(E, \varepsilon)\in\mathbf{N}$ 存在，使得

$$n > n_0 \Longrightarrow d(f_n(x), g(x)) < \varepsilon, \ \forall x \in E,$$

则称函数列$\langle f_n \rangle$**在紧致统上一致收敛于**g (converge uniformly on compacta)。

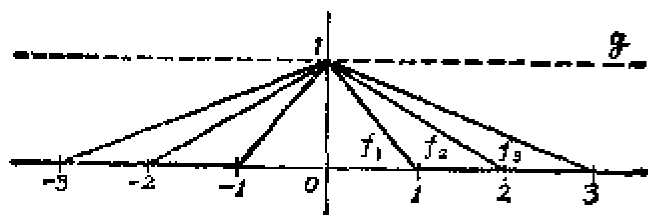
换句话说，所谓$\langle f_n \rangle$在紧致统上一致收敛于g是指：对任何紧致子集$E \subset X$，$\langle f_n \rangle$在E上的收缩一致收敛于g在E上的收缩，即：

$$\langle f_1|E, f_2|E, \cdots \rangle \text{ 一致收敛于 } g|E。$$

注意：一致收敛性导致在紧致统上的一致收敛性；又因为单元素集是紧致的，在紧致统上一致收敛性必导致逐点收敛性。

例 7.1 设$\langle f_1, f_2, \cdots \rangle$为$\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$中的一个函数列，定义如下：

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}|x| & \text{若 } |x| < n \\ 0 & \text{若 } |x| \geq n, \end{cases}$$



$\langle f_n \rangle$逐点收敛于常值函数$g(x)=1$，但是$\langle f_n \rangle$不一致收敛于g（见例 4.2）。但是，因为$\mathbf{R}$的每个紧致子集E是有界的，所以$\langle f_n \rangle$在紧致统上一致收敛于g。

定理 15.12 设$\mathscr{C}(X, Y)$为由拓扑空间X到度量空间(Y, d)的连续函数全体，则$\mathscr{C}(X, Y)$中的一个函数列$\langle f_n \rangle$关于紧致开拓扑收敛于$g \in \mathscr{C}(X, Y)$，当且仅当$\langle f_n \rangle$在紧致统上一致收敛于g。

由于上述定理，紧致开拓扑也叫做**紧致收敛拓扑**(topology of compact convergence)。

赋范空间上的泛函 (Functionals on normed spaces)

设 X 为赋范向量空间($\mathbf{R}$ 上的)，则以 X 为定义域的实值函数 f，即 f: $X\to\mathbf{R}$，称为一个**泛函**(functional)。

定义 设 f 为 X 上的泛函，若

(i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x, y\in X$,

(ii) $f(kx)=k[f(x)]$, $\forall x\in X$, $k\in\mathbf{R}$

成立，则 f 称为一个**线性泛函**(linear functional)。

若有 $M>0$ 使

$$|f(x)|\leqslant M\|x\|, \quad \forall x\in X,$$

则称 X 上的线性泛函 f 为**有界**(bounded)，这里的 M 称为 f 的一个**界**(bound)。

例8.1 设 X 为 $[a, b]$ 上赋以范数

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|;\ x\in[a, b]\}$$

的实值连续函数全体所成的空间，即 $X=C[a, b]$。令 $\boldsymbol{I}$: $X\to\mathbf{R}$ 定义如下：

$$\boldsymbol{I}(f)=\int_a^b f(t)dt,$$

则 $\boldsymbol{I}$ 是一个线性泛函；因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}(f+g)&=\int_a^b (f(t)+g(t))dt\\&=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b g(t)dt\\&=\boldsymbol{I}(f)+\boldsymbol{I}(g),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I(kf)&=\int_a^b (kf)(t)dt\\
&=\int_a^b k[f(t)]dt\\
&=k\int_a^b f(t)dt=kI(f)。
\end{aligned}
$$

此外，$M=b-a$ 是 I 的一个界，因为

$$I(f)=\int_a^b f(t)dt\leqslant M\sup\{|f(t)|\}=M\|f\|。$$

命题 15.13 设 f 与 g 为 X 上的有界线性泛函，又设 $k\in\mathbf{R}$，则 $f+g$ 及 $k\cdot f$ 也是 X 上的有界线性泛函。

于是（由命题 8.14）X 上所有有界线性泛函所成的集 X^* 是一个线性向量空间。

命题 15.14 X^* 上由公式

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|/\|x\|；\ x\neq 0\}$$

定义的函数是一个范数。

注意：若 M 是 f 的一个界，即 $|f(x)|\leqslant M\|x\|,\ \forall x\in X$，则特别是当 $x\neq 0$ 时，有 $|f(x)|/\|x\|\leqslant M$，因而 $\|f\|\leqslant M$。实际上，$\|f\|$ 可以有等价的定义：

$$\|f\|=\inf\{M；\ M\text{是 } f \text{ 的界}\}。$$

注意 X 上所有有界线性泛函所成的赋范空间称为 X 的**对偶空间**(dual space of X)。

习 题 解 答

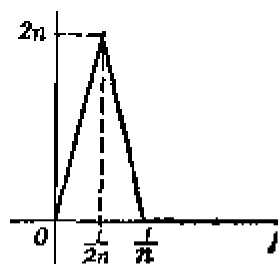
逐点收敛与点开拓扑

1. 设 $\langle f_1, f_2\cdots\rangle$ 是 $\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$ 中的函数列，其中 $I=$

1

[0, 1]，其定义如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}4n^2x & \text{若}\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2n}\\ -4n^2x+4n & \text{若}\quad \frac{1}{2n}<x<\frac{1}{n}\\ 0 & \text{若}\quad \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1。\end{cases}$$



求证：$\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于常值函数 $g(x)=0$。

解：对每个 $n\in\mathbf{N}$. $f_n(0)=0$，因而

$$\lim_{n\to\infty}f_n(0)=g(0)=0。$$

另一方面，若 $x_0>0$，则有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\frac{1}{n_0}<x_0$，因此

$$n>n_0\Longrightarrow f_n(x_0)=0\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=g(x_0)=0,$$

于是 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于零函数。

注意 $\int_0^1 f_n(x)dx=1$ 对于每个 $n\in\mathbf{N}$ 成立，且

$$\int_0^1 g(x)dx=0,$$

于是在这种情况下，积分的极限不等于极限的积分，即：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx。$$

2. 设 $C(I,\mathbf{R})$ 表示[0, 1]上赋以范数

$$\|f\|=\int_0^1|f(x)|dx$$

的实值连续函数的全体。试举一例说明：$C(I,\mathbf{R})$ 内一个函数列在上述范数下 $f_n\to g$，但 $\langle f_n\rangle$ 不逐点收敛于 g。

解：设 $\langle f_n\rangle$ 定义为 $f_n(x)=x^n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0。$$

因此 $\langle f_n\rangle$ 在上述范数下收敛于零函数 $g(x)=0$。另一方面，$\langle f_n\rangle$ 逐点收敛（见例 3.1）于函数 f, f 定义为：

$$f(x)=\begin{cases}0 & 若\quad 0\leqslant x<1\\ 1 & 若\quad x=1,\end{cases}$$

注意：$f\neq g$。

3. 设 Y 是 T_1 空间，T_2 空间，正则空间或是连通空间，求证：$\mathscr{F}(X, Y)$ 赋以点开拓扑时，也分别具有这些性质。

解：因为 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的点开拓扑是积拓扑，$\mathscr{F}(X, Y)$ 继承了 Y 的任何积不变性。由以前的结果，上述性质都是积不变性。

4. 求证定理 15.2：设 Y 为 Hausdorff 空间，又设 $\mathscr{A}$ 是赋以点开拓扑的 $\mathscr{F}(X, Y)$ 的一个子集，则下列命题是等价的：

（i）$\mathscr{A}$ 是紧致集，

（ii）$\mathscr{A}$ 是闭集，同时对于每个 $x\in X$，$\overline{\{f(x):\ f\in\mathscr{A}\}}$ 在 Y 中紧致。

解：由定理 15.1 知(ii)$\Longrightarrow$(i)，故只需证 (i)$\Longrightarrow$(ii)。

因 Y 是 Hausdorff 空间，而 T_2 是积不变的，故 $\mathscr{F}(X, Y)$ 也是 Hausdorff 空间。由定理 11.5 知：Hausdorff 空间的紧致子集是闭的；因此 $\mathscr{A}$ 是闭的。此外，每个赋值函数 e_x: $\mathscr{F}(X, Y)\to Y$ 关于点开拓扑来说是连续的；因此，对于每个 $x\in X$,

$$e_x[\mathscr{A}]=\{f(x):\ f\in\mathscr{A}\}$$

在 Y 内紧致且是闭的，因 Y 是 Hausdorff 空间。换句话说，$\overline{\{f(x):\ f\in\mathscr{A}\}}=\{f(x):\ f\in\mathscr{A}\}$ 是紧致的。

5. 求证定理15.3：设 τ 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的点开拓扑，又设 $\langle f_1, f_2 \cdots \rangle$ 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 中的一个函数列，则下列命题是等价的：

(i) $\langle f_n \rangle$ 关于 τ 收敛于 $g \in \mathscr{F}(X, Y)$，

(ii) $\langle f_n \rangle$ 逐点收敛于 g。

解：方法1　把 $\mathscr{F}(X, Y)$ 等同于积集

$$\mathbf{F} = \prod\{Y_x;\ x \in X\};$$

把 τ 等同于积拓扑，则由定理12.7，$\mathbf{F}$ 中的序列 $\langle f_n \rangle$ 收敛于 $g \in \mathbf{F}$，当且仅当对于每个射影 π_x，有

$$\langle \pi_x(f_n) \rangle = \langle e_x(f_n) \rangle = \langle f_n(x) \rangle$$

收敛于

$$\pi_x(g) = e_x(g) = g(x),$$

换句话说，$f_n \to g$ (关于 τ) iff $\lim f_n(x) = g(x)$，$\forall x \in X$ 即 iff $\langle f_n \rangle$ 逐点收敛于 g。

方法2　(i) $\Longrightarrow$ (ii)：设 x_0 为 X 内任一点，又设 G 是 Y 中含 $g(x_0)$ 的一个开集，即 $g(x_0) \in G$。则

$$g \in F(x_0, G) = \{f \in \mathscr{F}(X, Y):\ f(x_0) \in G\},$$

因而 $F(x_0, G)$ 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 中含 g 的一个 τ-开子集。由(i)，$\langle f_n \rangle$ 关于 τ 收敛于 g；因此

$$有\ n_0 \in \mathbf{N}\ 使得\quad n > n_0 \Longrightarrow f_n \in F(x_0, G),$$

从而，

$$n > n_0 \Longrightarrow f_n(x_0) \in G \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = g(x_0),$$

但 x_0 是任意的；因此 $\langle f_n \rangle$ 逐点收敛于 g。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：设 $F(x_0, G) = \{f:\ f(x_0) \in G\}$ 是 τ 的定义准基中含 g 的任一个集，则 $g(x_0) \in G$。由(ii)，$\langle f_n \rangle$ 逐点收敛于 g；因此

有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\quad n>n_0\Longrightarrow f_n(x_0)\in G$,

因而 $\qquad n>n_0\Longrightarrow f_n\in F(x_0,G)\Longrightarrow\langle f_n\rangle$ τ-收敛于 g。

一致收敛

6．求证命题 15.4：设 $\langle f_1, f_2\cdots\rangle$ 是一个由拓扑空间 X 到度量空间 Y 的一个连续函数列，且设 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g: $X\to Y$，则 g 连续。

解：设 $x_0\in X$，又设 $\varepsilon>0$，则 g 在 x_0 处连续是指：若有含 x_0 的一个开集 $G\subset X$，使得

$$x\in G\Longrightarrow d(g(x),g(x_0))<\varepsilon,$$

现在 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g，因而

$$\text{有 } m\in\mathbf{N} \text{ 使得} \quad d(f_m(x),g(x))<\frac{1}{3}\varepsilon,\ \forall x\in X。$$

因此，由三角不等式，

$$\begin{aligned}&d(g(x),g(x_0))\\&\leqslant d(g(x),f_m(x))+d(f_m(x),f_m(x_0))+d(f_m(x_0),g(x_0))\\&<d(f_m(x),f_m(x_0))+\frac{2}{3}\varepsilon。\end{aligned}$$

因为 f_m 是连续的，故有含 x_0 的一个开集 $G\subset X$ 使得

$$x\in G\Longrightarrow d(f_m(x),f_m(x_0))<\frac{1}{3}\varepsilon,$$

因而 $\qquad x\in G\Longrightarrow d(g(x),g(x_0))<\varepsilon$,

于是 g 是连续的。

7．设 $\langle f_1, f_2\cdots\rangle$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个实值连续函数列，并且它一致收敛于 g: $[a,b]\to\mathbf{R}$。求证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b g(x)dx。$$

注意(习题1)这一结论在逐点收敛情况下是不成立的

解：设 $\varepsilon>0$，我们要证：

$$\text{有 } n_0\in\mathbf{N} \text{ 使得 } \quad n>n_0 \Longrightarrow \left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b g(x)dx\right|<\varepsilon,$$

现在 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g，因而有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得

$$n>n_0 \Longrightarrow |f_n(x)-g(x)|<\varepsilon/(b-a),\ \forall x\in[a,b]。$$

因此，若

$$n>n_0,\ \left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b g(x)dx\right|=\left|\int_a^b (f_n(x)-g(x))dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^b |f_n(x)-g(x)|\,dx$$

$$<\int_a^b \varepsilon/(b-a)dx=\varepsilon。$$

8．求证定理15.5：设 $\langle f_1, f_2\cdots\rangle$ 为 $\mathscr{B}(X, Y)$ 中的一个函数列，而 $\mathscr{B}(X, Y)$ 赋以度量：

$$e(f, g)=\sup\{d(f(x), g(x)):\ x\in X\},$$

则下列命题是等价的：

(i) $\langle f_n\rangle$ 关于度量 e 收敛于 $g\in\mathscr{B}(X, Y)$，

(ii) $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g。

解：(i)$\Longrightarrow$(ii)：设 $\varepsilon>0$。因为 $\langle f_n\rangle$ 关于度量 e 收敛于 g，故

$$\text{有 } n_0\in\mathbf{N} \text{ 使得 } \quad n>n_0\Longrightarrow e(f_n, g)<\varepsilon,$$

因此，

$$n>n_0\Longrightarrow d(f_n(x),g(x))\leqslant\sup\{d(f_n(x), g(x)):\ x\in X\}$$
$$=e(f_n, g)<\varepsilon,\ \forall x\in X$$

那就是，$\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g。

(ii)$\Longrightarrow$(i)：设 $\varepsilon>0$。因 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g，故

有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得

$$n>n_0\Longrightarrow d(f_n(x),g(x))<\varepsilon/2,\ \forall x\in X,$$

因此，

$$n>n_0\Longrightarrow\sup\{d(f_n(x),g(x)):\ x\in X\}\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon,$$

那就是，当 $n>n_0$ 时有 $e(f_n,g)<\varepsilon$，因而 $\langle f_n\rangle$ 关于度量 e 收敛于 g。

函数空间 $C[0,1]$

9．求证命题15.6：设 $f: I\to\mathbf{R}$ 在 $I=[0,1]$ 上连续，则对任何 $\varepsilon>0$，

有 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得 $|x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，即 f 为一致连续。

解：设 $\varepsilon>0$。因 f 连续，故对任何 $p\in I$，

有 $\delta_p>0$ 使得

$$|x-p|<\delta_p\Longrightarrow|f(x)-f(p)|<\frac{1}{2}\varepsilon。\qquad(1)$$

对于每个 $p\in I$，令 $S_p=I\cap\left(p-\frac{1}{2}\delta_p,\ p+\frac{1}{2}\delta_p\right)$，则 $\{S_p:\ p\in I\}$ 是 I 的一个开复盖。同时因为 I 是紧致的，故 S_p 中有限个集也能复盖 I，譬如说，$I=S_{p_1}\cup\cdots\cup S_{p_m}$。令

$$\delta=\frac{1}{2}\min(\delta_{p_1},\ \cdots,\ \delta_{p_m})$$

假设 $|x-y|<\delta$，则对于某个 k，$x\in S_{p_k}$，因而

$$|x-p_k|<\frac{1}{2}\delta_{p_k}<\delta_{p_k}$$

并且

$$|y-p_k|\leqslant|y-x|+|x-p_k|<\delta+\frac{1}{2}\delta_{p_k}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\delta_{p_k} + \frac{1}{2}\delta_{p_k} = \delta_{p_k}$$

因此由(1)得

$$|f(x) - f(p_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

及
$$|f(y) - f(p_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

于是由三角不等式，

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(p_k)| + |f(p_k) - f(y)|$$
$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon。$$

10．设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是 $C[0, 1]$ 中的 Cauchy 序列。求证：对于每个 $x_0 \in I = [0, 1]$，$\langle f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots\rangle$ 是 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 序列。

解：设 $x_0 \in I$，又设 $\varepsilon > 0$。因为 $\langle f_n\rangle$ 是 Cauchy 序列，故有 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得

$$m, n > n_0 \Longrightarrow \|f_n - f_m\| = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|: x \in I\} < \varepsilon$$
$$\Longrightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon,$$

因而 $\langle f_n(x_0)\rangle$ 是一个 Cauchy 序列。

11．求证定理 15.7：$C[0, 1]$ 是完备的赋范向量空间。

解：设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是 $C[0, 1]$ 内的一个 Cauchy 序列，则对于每个 $x_0 \in I$，$\langle f_n(x_0)\rangle$ 是 $\mathbf{R}$ 内的一个 Cauchy 序列并在 $\mathbf{R}$ 内收敛，因为 $\mathbf{R}$ 是完备的。定义 $g: I \to \mathbf{R}$ 为：

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

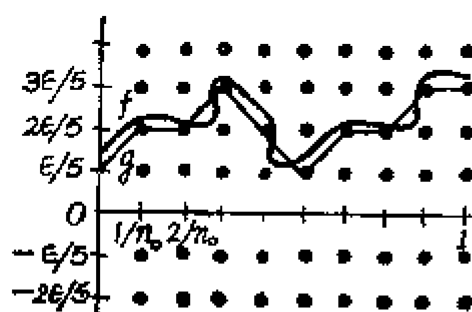
则（见习题 32）$\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g。但是由命题 15.4，g 是连续的，即 $g \in C[0, 1]$，因此 $C[0, 1]$ 是完备的。

12．设 $f \in C[0, 1]$，又设 $\varepsilon > 0$，求证：有 $n_0 \in \mathbf{N}$ 及点

$p_0=(0,\ \varepsilon k_0/5),\cdots,$

$p_i=(i/n_0,\ \varepsilon k_i/5),\cdots,$

$p_{n_0}=(1,\ \varepsilon k_{n_0}/5)$



存在，其中 $k_0,\cdots,k_{n_0}$ 是整数，使得若 g 是联结 p_i 的折线，则 $\|f-g\|<\varepsilon$（见附图）。换句话说，分段线性（或折线）函数在 $C[0,1]$ 中稠密。

解： f 在 $[0,1]$ 上一致连续因而

$$\text{有 } n_0\in\mathbf{N} \text{ 使得}\quad |a-b|\leqslant 1/n_0 \Longrightarrow |f(a)-f(b)|<\varepsilon/5。\tag{1}$$

考察 $I\times\mathbf{R}$ 下列子集：

$$A=\{\langle x,\ y\rangle:\ x=i/n_0,\ y=k\varepsilon/5 \text{ 其中 } i=0,\cdots,n_0;\ k\in\mathbf{Z}\}$$

选取 $p_i=\langle x_i,\ y_i\rangle\in A$ 使得

$$y_i\leqslant f(x_i)<y_i+\varepsilon/5,$$

则

$$|f(x_i)-g(x_i)|=|f(x_i)-y_i|<\varepsilon/5,$$

且由(1)，

$$|f(x_i)-f(x_{i+1})|<\varepsilon/5$$

如上图所示。

注意

$$\begin{aligned}&|g(x_i)-g(x_{i+1})|\\ \leqslant\ &|g(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x_{i+1})|+|f(x_{i+1})-g(x_{i+1})|\\ <\ &\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=3\varepsilon/5。\end{aligned}$$

因为 g 在 x_i 和 x_{i+1} 之间是线性的，

$$x_i\leqslant z\leqslant x_{i+1} \Longrightarrow |g(x_i)-g(z)|\leqslant|g(x_i)-g(x_{i+1})|<3\varepsilon/5。$$

现在对于任一点 $z\in I$，有 x_k 满足 $x_k\leqslant z\leqslant x_{k+1}$。因此

$$
\begin{aligned}
&|f(z)-g(z)| \\
&\quad \leqslant |f(z)-f(x_k)|+|f(x_k)-g(x_k)|+|g(x_k)-g(z)| \\
&\quad <\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{3\varepsilon}{5}=\varepsilon。
\end{aligned}
$$

但是 z 是 I 中的任意点；因此 $\|f-g\|<\varepsilon$。

13. 设 m 为任意正整数，又设 A_m 表示 $C[0,1]$ 中具备下述性质的函数 f 的全体。这个性质是：

有 $x_0\in\left[0,1-\frac{1}{m}\right]$ 使得

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|\leqslant m,\ \forall h\in\left(0,\frac{1}{m}\right)。$$

求证：A_m 是 $C[0,1]$ 的一个闭子集（注意每个在 $C[0,1]$ 中的函数 f，如果在一点可微则属于某个 A_m，只要 m 充分大时）。

解：设 $g\in\bar{A}_m$。要证的是 $g\in A_m$，即 $\bar{A}_m=A_m$。

因 $g\in\bar{A}_m$，故 A_m 中有序列 $\langle f_1,f_2,\cdots\rangle$ 收敛于 g。而对每个 f_i 来说，有 x_i 使得 $x_i\in\left[0,1-\frac{1}{m}\right]$ 及

$$\left|\frac{f_i(x_i+h)-f_i(x_i)}{h}\right|\leqslant m,\ \forall h\in\left(0,\frac{1}{m}\right)。\tag{1}$$

但是 $\langle x_n\rangle$ 是紧致集 $\left[0,1-\frac{1}{m}\right]$ 中一个点列，因而这点列含一子列 $\langle x_{i_n}\rangle$ 收敛于譬如设 $x_0\in\left[0,1-\frac{1}{m}\right]$。

现在当 $f_n\to g$ 时有 $f_{i_n}\to g$，因而在(1)中取极限，得到

$$\left|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right|\leqslant m,\ \forall h\in\left(0,\frac{1}{m}\right),$$

因此 $g\in A_m$，且 A_m 是闭的。

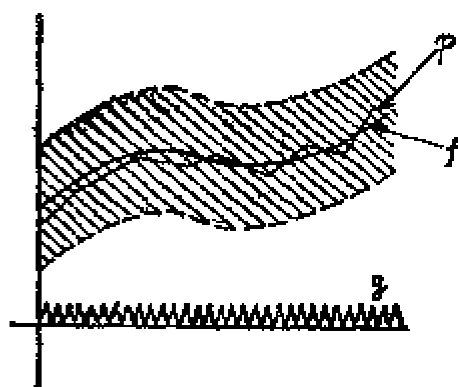
14．设 $A_m \subset C[0,1]$ 是习题13中所定义的函数集，求证 A_m 在 $C[0,1]$ 中无处稠密。

解： A_m 在 $C[0,1]$ 中无处稠密，当且仅当

$$\operatorname{int}(\overline{A}_m)=\operatorname{int}(A_m)=\varnothing。$$

设 $S=S(f,\delta)$ 是 $C[0,1]$ 中的任一开球。我们要证 S 含有不属于 A_m 的一点，因而 $\operatorname{int}(\overline{A}_m)=\varnothing$。

由习题12，有折线 $p\in C[0,1]$存在，使得$\|f-p\|<\delta/2$。设g为锯齿形函数，其幅度小于 $\frac{1}{2}\delta$，其斜率大于 m（见附图）（见习题33）。



则函数 $h=p+g$ 属于 $C[0,1]$ 但不属于 A_m，而且

$$\|f-h\|\leqslant\|f-p\|+\|g\|<\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta=\delta,$$

所以 $h\in S$，证明完毕。

15．设 $A_m \subset C[0,1]$ 是习题13中所定义的函数集，求证：$C[0,1]\neq\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$。

解： 因 A_m 在 $C[0,1]$ 中无处稠密，故 $B=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$ 是第一纲的。但由 Baire 的纲定理，$C[0,1]$ 作为完备的度量空间是第二纲的，所以 $C[0,1]\neq B$。

16．求证命题15.8，有连续函数 f：$[0,1]\to\mathbf{R}$ 存在，

它处处不可导。

解：设 $f\in C[0,1]$ 至少在某一点譬如说 x_0 可导，假设 $|f'(x_0)|=t$，则

有 $\varepsilon>0$ 使得 $\left|\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|\leqslant t+1, \forall h\in(-\varepsilon,\varepsilon)$。现在取 $m_0\in\mathbf{N}$ 使 $t+1\leqslant m_0$ 及 $1/m_0<\varepsilon$。则 $f\in A_{m_0}$。于是 $\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$ 包含了在 I 的某点处可导的函数全体。

但是由前一习题知：$C[0,1]\neq\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$，因而在 $C[0,1]$ 内有这样的函数，它处处不可导。

17. 求证定理 15.9(Ascoli 定理)：设 $\mathscr{A}$ 为 $C[0,1]$ 中的闭集，则下列命题等价：(i) $\mathscr{A}$ 是紧致的，(ii) $\mathscr{A}$ 为一致有界及等度连续。

解：(i)$\Longrightarrow$(ii)：因 $\mathscr{A}$ 在 $C[0,1]$ 紧致，故它在 $C[0,1]$ 中有界，于是作为一个函数集来看，它一致有界。现在我们只要证明 $\mathscr{A}$ 是等度连续的。

为此，设 $\varepsilon>0$。因 $\mathscr{A}$ 紧致，故 $\mathscr{A}$ 有一个有限的 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 网，譬如说 $\mathscr{B}=\{f_1,\cdots,f_t\}$。因此对任一 $f\in\mathscr{A}$，有 $f_{i_0}\in\mathscr{B}$ 使得

$$\|f-f_{i_0}\|=\sup\{|f(x)-f_{i_0}(x)|: x\in I\}\leqslant\varepsilon/3。$$

因此，对任何 $x, y\in I=[0,1]$，有：

$$\begin{aligned}
&|f(x)-f(y)|\\
&=|f(x)-f_{i_0}(x)+f_{i_0}(x)-f_{i_0}(y)+f_{i_0}(y)-f(y)|\\
&\leqslant|f(x)-f_{i_0}(x)|+|f_{i_0}(x)-f_{i_0}(y)|+|f_{i_0}(y)-f(y)|\\
&\leqslant\varepsilon/3+|f_{i_0}(x)-f_{i_0}(y)|+\varepsilon/3\\
&=|f_{i_0}(x)-f_{i_0}(y)|+2\varepsilon/3。
\end{aligned}$$

现在每个 $f_i \in \mathscr{B}$ 是一致连续的，因而

有 $\delta_i > 0$ 使得 $|x-y| < \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$。

令 $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_l\}$。则对任一 $f \in \mathscr{A}$,

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + 2\varepsilon/3 < \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon,$$

于是 $\mathscr{A}$ 是等度连续的。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：因 $\mathscr{A}$ 是完备空间 $C[0, 1]$ 的闭子集，我们只要证 $\mathscr{A}$ 完全有界。

为此，令 $\varepsilon > 0$。因 $\mathscr{A}$ 等度连续，故

有 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得

$$|a-b| < \frac{1}{n_0} \Longrightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon/5, \quad \forall f \in \mathscr{A}。$$

现在对每个 $f \in \mathscr{A}$，根据习题 12，我们可以构造一个折线函数 p_f 使 $\|f - p_f\| < \varepsilon$ 且 p_f 所联结的点是属于下面的点集：

$$A = \{\langle x, y\rangle: x = 0, 1/n_0, 2/n_0, \cdots, 1; y = n\varepsilon/5, n \in \mathbf{Z}\}.$$

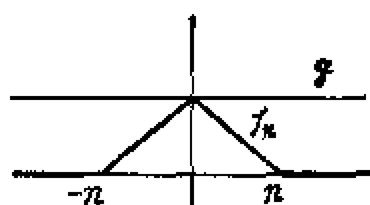
我们来证明 $\mathscr{B} = \{p_f: f \in \mathscr{A}\}$ 是一个有限集，因此就是 $\mathscr{A}$ 的一个有限 ε-网。

因 $\mathscr{A}$ 一致有界，因而 $\mathscr{B}$ 一致有界。因此，A 中只能有有限个点出现在 $\mathscr{B}$ 的一切折线之中，从而 $\mathscr{B}$ 只能含有有限条折线。于是 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个有限 ε-网，因而 $\mathscr{A}$ 完全有界。

紧致收敛

18. 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是 $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 中的一个函数列，定义如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{n}|x| & 若\ |x|<n\\ 0 & 若\ |x|\geqslant n。\end{cases}$$



求证：$\langle f_n\rangle$ 在紧致统上一致收敛于常值函数 $g(x)=1$。

解：设 E 是 $\mathbf{R}$ 的紧致子集，又设 $0<\varepsilon<1$。因 E 紧致，故它有界；譬如说有 $M>0$ 使 $E\subset(-M, M)$。现在

$$有\ n_0\in\mathbf{N}\ 使得\quad n_0>\frac{M}{\varepsilon}\quad 或\quad \frac{M}{n_0}<\varepsilon,$$

因此

$$n>n_0\Longrightarrow|f_n(x)-g(x)|=\frac{1}{n}|x|<\frac{M}{n_0}<\varepsilon,\ \forall x\in E,$$

因此 $\langle f_n\rangle$ 在 E 上一致收敛于 g。

19. 求证：若 Y 是 Hausdorff 空间，则 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的紧致开拓扑也是 Hausdorff 空间。

解：方法 1　设 $f, g\in\mathscr{F}(X, Y)$，且 $f\neq g$，则有 $p\in X$ 使 $f(p)\neq g(p)$。今 Y 是 Hausdorff 空间，故 Y 中有开集 G 与 H 使得 $f(p)\in G$, $g(p)\in H$ 及 $G\cap H=\varnothing$。因此

$$f\in F(p, G),\ g\in F(p, H)\ 及\ F(p, G)\cap F(p,H)=\varnothing。$$

但单元素集 $\{p\}$ 是紧致集，因而 $F(p, G)$ 与 $F(p, H)$ 属于 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的紧致开拓扑。从而，$\mathscr{F}(X, Y)$ 是 Hausdorff 空间。

方法 2　紧致开拓扑精于点开拓扑，由于 T_2 是积不变性，故点开拓扑空间是 Hausdorff 空间，从而紧致开拓扑空间也是 Hausdorff 空间。

20. 求证定理 15.12：设 $C(X, Y)$ 是由拓扑空间 X 到度量空间 (Y, d) 的连续函数全体，$\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是 $C(X, Y)$

中的一个函数列。则下列命题是等价的：

(i) $\langle f_n\rangle$ 在紧致统上一致收敛于 $g\in C(X, Y)$。

(ii) $\langle f_n\rangle$ 关于 $C(X, Y)$ 上的紧致开拓扑 τ 收敛于 g。

解：(i)$\Longrightarrow$(ii)：设 $F(E, G)$ 是 τ 的准基中一个元素，且设它含 g；因而 $g[E]\subset G$，其中 E 是紧致集而 G 是开集。

因 g 连续，故 $g[E]$ 紧致。其次 $g[E]\cap G^c=\varnothing$ 因而紧致集 $g[E]$ 与闭集 G^c 的距离大于零，譬如说 $d(g[E], G^c)=\varepsilon>0$。因 $\langle f_n\rangle$ 在紧致统上一致收敛于 g，故

有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\quad n>n_0\Longrightarrow d(f_n(x), g(x))<\varepsilon,\ \forall x\in E$，

因此

$$d(f_n(x), g[E])\leqslant d(f_n(x), g(x))<\varepsilon,\ \forall x\in E,$$

因而对于任何 $x\in E$ 有 $f_n(x)\notin G^c$。换句话说，

$$n>n_0\Longrightarrow f_n[E]\subset G\Longrightarrow f_n\in F(E, G),$$

从而，$\langle f_n\rangle$ 关于紧致开拓扑 τ 收敛于 g。

(ii)$\Longrightarrow$(i)：设任给 X 上的紧致集 E 及 $\varepsilon>0$，我们要证明 $\langle f_n\rangle$ 在 E 上一致收敛于 g，即

有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\quad n>n_0\Longrightarrow d(f_n(x), g(x))<\varepsilon,\ \forall x\in E$。

因 E 紧致及 g 连续，故 $g[E]$ 是紧致的。令

$$\mathscr{B}=\{p_1, \cdots, p_t\}$$

是 $g[E]$ 的一个有限 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网。考察开球

$$S_1=S\left(p_1, \frac{\varepsilon}{3}\right), \cdots, S_t=S\left(p_t, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

及

$$G_1=S\left(p_1, \frac{2\varepsilon}{3}\right), \cdots, G_t=S\left(p_t, \frac{2\varepsilon}{3}\right).$$

因此 $$\overline{S_1}\subset G_1, \cdots, \overline{S_t}\subset G_t.$$

此外，因 $\mathscr{B}$ 是 $g[E]$ 的一个 $\frac{\varepsilon}{3}$网，故

$$g[E]\subset\overline{S}_1\cup\cdots\cup\overline{S}_t$$

因而 $$E\subset g^{-1}[\overline{S}_1]\cup\cdots\cup g^{-1}[\overline{S}_t]。$$

令 $E_i=E\cap g^{-1}[\overline{S}_i]$ 因而 $E=E_1\cup\cdots\cup E_t$ 及 $g[E_i]\subset\overline{S}_i\subset G_i$

我们要证 E_i 是紧致的。因为 g 连续，从而 $g^{-1}[\overline{S}_i]$ 作为闭集的逆象也是闭集，因此 $E_i=E\cap g^{-1}[\overline{S}_i]$ 作为紧致集与闭集之交也是紧致的。

由 $g[E_i]\subset G_i$ 可知：$F(E_i, G_i)$ 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 中含 g 的 τ-开集，从而 $\bigcap\limits_{i=1}^{t}F(E_i, G_i)$ 也是一个含 g 的 τ-开集。但 $\langle f_n\rangle$ 关于 τ 是收敛于 g 的，故

有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\quad n>n_0\Longrightarrow f_n\in\bigcap\limits_{i=1}^{t}F(E_i, G_i)$

$$\Longrightarrow f_n[E_1]\subset G_1, \cdots, f_n[E_t]\subset G_t。$$

现在设 $x\in E$，则 $x\in E_{i_0}$，因而当 $n>n_0$ 时有：

$$f_n(x)\in f_n[E_{i_0}]\subset G_{i_0}\Longrightarrow d(f_n(x), p_{i_0})<2\varepsilon/3,$$

同时又有：

$$g(x)\in g[E_{i_0}]\subset\overline{S}_{i_0}\Longrightarrow d(g(x), p_{i_0})\leqslant\varepsilon/3,$$

于是由三角不等式有：

$$n>n_0\Longrightarrow d(f_n(x), g(x))\leqslant d(f_n(x), p_{i_0})+d(p_{i_0}, g(x))$$
$$<2\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon,\ \forall x\in E。$$

赋范空间上的泛函

21．求证：若 f 是 X 上的线性泛函，则 $f(0)=0$。

解：因 f 是线性泛函及 $0=0+0$，故

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0),$$

两边加上 $-f(0)$ 即得 $f(0)=0$。

22. 求证：X 上的有界线性泛函是一致连续的。

解：设 M 是 f 的一个界，又设 $\varepsilon>0$。令 $\delta=\varepsilon/M$，则

$$\|x-y\|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|=|f(x-y)|\leqslant M\|x-y\|<\varepsilon。$$

23. 求证命题 15.13：设 f 与 g 是 X 上的有界线性泛函，又设 $C\in\mathbf{R}$。则 $f+g$ 与 $C\cdot f$ 也是 X 上的有界线性泛函。

解：设 f 与 g 的界分别为 M 与 M^*，则

$$\begin{aligned}(f+g)(x+y)&=f(x+y)+g(x+y)\\&=f(x)+f(y)+g(x)+g(y)\\&=(f+g)x+(f+g)y,\\(f+g)(kx)&=f(kx)+g(kx)=kf(x)+kg(x)\\&=k[f(x)+g(x)]=k(f+g)(x),\\|(f+g)(x)|&=|f(x)+g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\\&\leqslant M\|x\|+M^*\|x\|=(M+M^*)\|x\|,\end{aligned}$$

于是 $f+g$ 是一个有界线性泛函。

此外，

$$\begin{aligned}(C\cdot f)(x+y)&=Cf(x+y)=C[f(x)+f(y)]\\&=Cf(x)+Cf(y)=(C\cdot f)(x)+(C\cdot f)(y),\\(C\cdot f)(kx)&=Cf(kx)=Ckf(x)=kCf(x)=k(C\cdot f)(x),\\|(C\cdot f)(x)|&=|Cf(x)|=|C||f(x)|\leqslant|C|(M\|x\|)\\&=(|C|M)\|x\|,\end{aligned}$$

因而 $C\cdot f$ 是一个有界线性泛函。

24. 求证命题 15.14：由下式定义的 X^* 上的函数

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|/\|x\|:\ x\neq 0\}$$

是一个范数。

解：(1) 若 $f=0$，则 $f(x)=0$，$\forall x\in X$，因而

$$\|f\| = \sup\{0\} = 0。$$

若 $f \neq 0$，则有 $x_0 \neq 0$ 使得 $f(x_0) \neq 0$，因而

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|/\|x\|\} \geq |f(x_0)|/\|x_0\| > 0,$$

于是关于范数的公理[N_1]成立。

(2) 因

$$\begin{aligned}\|kf\| &= \sup\{|(k\cdot f)(x)|/\|x\|\} = \sup\{|k[f(x)]|/\|x\|\} \\ &= \sup\{|k|\cdot|f(x)|/\|x\|\} = |k|\sup\{|f(x)|/\|x\|\} \\ &= |k|\,\|f\|,\end{aligned}$$

所以公理[N_2]成立。

(3) 因

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \sup\{|f(x)+g(x)|/\|x\|\} \\ &\leq \sup\{(|f(x)|+|g(x)|)/\|x\|\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|/\|x\|\} + \sup\{|g(x)|/\|x\|\} \\ &= \|f\| + \|g\|,\end{aligned}$$

所以公理[N_3]成立。

补 充 习 题

函数序列的收敛性

25. 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是由 $f_n(x) = x^n/n$ 所定义的，定义域为 $I = [0, 1]$ 的实值函数序列。

(i) 求证 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于常值函数 $g(x) = 0$，即对每个 $x \in I$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$。

(ii) 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x) \neq \dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$。

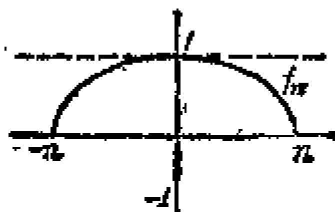
26. 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是定义域为 $[a, b]$ 的，一致收敛于 g 的实值可微函数序列，求证

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)。$$

（注意，由前一习题知此结果对逐点收敛情况不成立。）

27. 设 f_n: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}\sqrt{n^2-x^2} & 若\ |x|<n\\ 0 & 若\ |x|\geqslant n\end{cases}$$

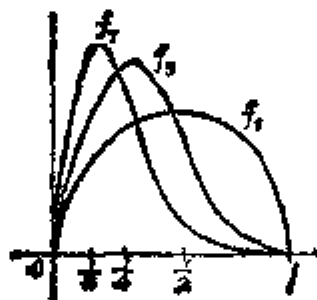


所定义，

（i）求证 $\langle f_n\rangle$ 不一致收敛于常值函数 $g(x)=1$，

（ii）求证 $\langle f_n\rangle$ 在紧致统上一致收敛于常值函数 $g(x)=1$。

28. 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是由 $f_n(x)=nx(1-x)^n$ 所定义的定义域为 $I=[0, 1]$ 的函数序列，



（i）求证 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于常值函数 $g(x)=0$。

（ii）求证 $\langle f_n\rangle$ 不一致收敛于 $g(x)=0$。

（iii）求证：在这种情况下

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx。$$

29. 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是 $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 中由 $f_n(x)=\frac{n+1}{n}x$ 所定义的序列，

（i）求证 $\langle f_n\rangle$ 在紧致统上一致收敛于函数 $g(x)=x$。

（ii）求证 $\langle f_n\rangle$ 不一致收敛于 $g(x)=x$。

30. 设 $\langle f_1, f_2, \cdots\rangle$ 是 $I=[0, 1]$ 上的 (Riemann) 可积函数列。若

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)-g(x)|^2 dx=0,$$

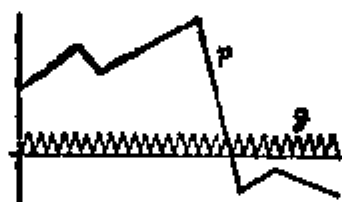
则称序列 $\langle f_n\rangle$ **平均收敛于** g。

(i) 求证若 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g，则 $\langle f_n\rangle$ 平均收敛于 g。

(ii) 用反例说明从平均收敛性不必然导致逐点收敛性。

函数空间 $C[0, 1]$

31. 求证 $C[a, b]$ 与 $C[0, 1]$ 等距因而同胚。



32. 求证：设 $\langle f_n\rangle$ 在 $C[0, 1]$ 中一致收敛于 g，又设 $x_n\to x_0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=g(x_0)$。

33. 设 p 是 $C[0, 1]$ 中的一个折线，又设 $\delta>0$，求证存在一个幅度小于 $\frac{1}{2}\delta$ 即 $\|g\|<\frac{1}{2}\delta$ 的锯齿函数，使 $p+g$ 不属于 A_m（见习题 14）。

34. 设 $\langle f_n\rangle$ 是 $C[0, 1]$ 中的 Cauchy 序列，又设 $\langle f_n\rangle$ 逐点收敛于 g，则 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 g。

一致连续性

35. 求证 $f(x)=1/x$ 在开区间 $(0, 1)$ 上不是一致连续的。

36. 设 X 与 Y 是任意的度量空间，试对函数 f：$X\to Y$ 定义一致连续性。

37. 求证，若 f 是紧致度量空间 X 到度量空间 Y 的一个连续函数，则 f 是一致连续的。

赋范空间上的泛函

38. 设 f 是赋范空间 X 上的一个有界线性泛函，求证：$\sup\{|f(x)|/\|x\|: x\neq 0\}=\inf\{M: M$ 是 f 的一个界$\}$。

39. 求证：若 f 是 X 上的一个连续线性泛函，则 f 是有界的。

40. 求证：任一赋范空间 X 的对偶空间 X^* 是完备的。

附 录　实数的性质

域公理(Field axioms)

实数集记作 **R**，它在数学中，特别是在分析学中起着极重要的作用。拓扑学的许多概念实际上是实数集一些性质的抽象化。集 **R** 的特征可以用一句话来概括："**R** 是一个**完备的 Archimed 有序域**"。在本附录里我们研究 **R** 中的序关系，这种序关系是用来定义 **R** 上的"通常拓扑"(见第四章)。现在我们叙述 **R** 中的域公理，全书中都假设了域公理及其推论。

定义　具有两个以上元素的集 F 连同称为加法 (+) 和乘法 (•) 的两种运算，如果满足下列公理，则称 F 为一个域(field)：

[A_1] 封闭性：$a, b\in F\Longrightarrow a+b\in F$

[A_2] 结合律：$a, b, c\in F\Longrightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$

[A_3] (加法)零元素：$\exists 0\in F$ 使得 $0+a=a+0=a$, $\forall a\in F$

[A_4] (加法)逆元素：$a\in F\Longrightarrow \exists -a\in F$ 使得 $a+(-a)=(-a)+a=0$

[A_5] 交换律：$a, b\in F\Longrightarrow a+b=b+a$

[M_1] 封闭性：$a, b\in F\Longrightarrow a\cdot b\in F$

[M_2] 结合律：$a, b, c\in F\Longrightarrow (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

[M_3] （乘法）单位元素：$\exists 1\in F$, $1\neq 0$, 使得

$$1\cdot a=a\cdot 1=a,\ \forall a\in F$$

[M_4] （乘法）逆元素：$a\in F$, $a\neq 0\Longrightarrow \exists a^{-1}\in F$ 使得

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$$

[M_5] 交换律：$a, b\in F\Longrightarrow a\cdot b=b\cdot a$

[D_1] 左分配律：$a, b, c\in F\Longrightarrow a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

[D_2] 右分配律：$a, b, c\in F\Longrightarrow (b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$

其中 $\exists$ 读作“存在着”；$\forall$ 读作“对于每一个”；$\Longrightarrow$ 读作“导致”。

由域公理立即可得下列关于实数的代数性质。

命题 A.1 设 F 为一个域，则：

(i) 元素 0 和 1 是唯一的。

(ii) 下列消去律成立：

(1) $a+b=a+c\Longrightarrow b=c$,

(2) $a\cdot b=a\cdot c$, $a\neq 0\Longrightarrow b=c$。

(iii) 两种逆元素 $-a$ 和 a^{-1} 是唯一的。

(iv) 对任何 $a, b\in F$ 有：

(1) $a\cdot 0=0$,

(2) $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$,

(3) $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$。

域内的减法与除法（除以非零元素）运算定义如下：

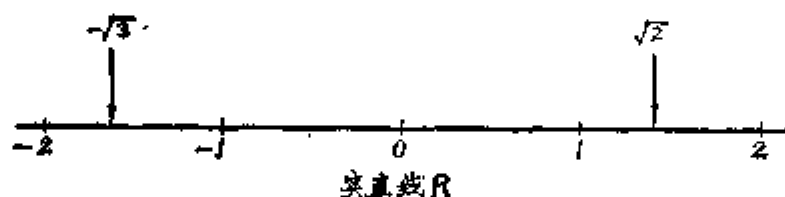
$$b-a\equiv b+(-a) \quad 与 \quad \frac{b}{a}\equiv b\cdot a^{-1}。$$

注意 赋予两种运算的一个非空集，若能满足域公理中除了[M_3], [M_4] 与 [M_5] 以外的诸公理，则称为一个**环**(ring)。例如，整数集 **Z** 在加法与乘法运算下是一个

环，但不是一个域。

实直线(Real line)

我们假定读者已熟悉用直线上的点对 **R** 作几何表示的方法，如下图所示。称为原点的那个点通常表示 0 而通常在 0 的右边的另一个点用来表示 1。则有一个自然的方法将直线上的点与实数对应起来：即每个点表示唯一的一个实数；同时每个实数由唯一的一点表示。由于这个缘故我们也常把 **R** 叫做**实直线**(real line)，并把“点”与“数”两个名词不加区别地使用。



实直线 **R**

R 的子集(Subsets of R)

符号 **Z** 与 **N** 用来表示 **R** 的下列子集：

$$\mathbf{Z}=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

$$\mathbf{N}=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

Z 中的元素称为有理整数（rational integers）或简称为整数(integers)；**N** 中的元素称为**正整数**(positive integers)或自然数(natural numbers)。

符号 **Q** 用来表示**有理数集**（rational numbers）。所谓有理数就是能表示为两个整数之比的实数，其中第二个整数为非零整数，即：

$$\mathbf{Q}=\{x\in\mathbf{R}: x=p/q; p, q\in\mathbf{Z}, q\neq 0\}$$

由于每个整数也是一个有理数，例如 $-5=5/(-1)$，所以 $\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的一个子集。事实上有下列层次关系：

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}。$$

所谓**无理数**(irrational numbers)是指不是有理数的实数；于是 $\mathbf{Q}^c$，即有理数集 $\mathbf{Q}$（相对于 $\mathbf{R}$）的余集表示无理数集。

正数(Positive numbers)

在实直线 $\mathbf{R}$ 上位于 0 的右侧，亦即和 1 同侧的数是**正数**(positive numbers)，在 0 左侧的数为**负数**(negative numbers)，下列公理完整地刻划了正数集的特征：

[p_1] 若 $a\in\mathbf{R}$，则下列三种情况中恰好有一种成立。a 是正的；$a=0$；$-a$ 是正的。

[p_2] 若 $a,b\in\mathbf{R}$ 都是正数，则它们的和 $a+b$ 与它们的积 $a\cdot b$ 也都是正数。

由此可见：a 为正数，当且仅当 $-a$ 为负数。

例 1.1 我们只利用[p_1]与[p_2]来证明实数 1 是正数。由[p_1]，或者 1 是正数，或者 -1 是正数。假定 -1 是正的，则由[p_2]知 $(-1)(-1)=1$ 也是正的，但这是与[p_1]相矛盾的，因为[p_1]指出：1 与 -1 不能同时是正数。故 -1 是正的这个假定是不对的，因此 1 是正的。

例 1.2 实数 -2 是负的，因为由例 1.1 已知 1 是正的，于是由[p_2]知 $1+1=2$ 是正的，因此由[p_1]知 -2 不可能是正的，即 -2 是负的。

例 1.3 我们来证正数 a 与负数 b 的积 $a\cdot b$ 是负的。因 b 负，故由[p_1]，$-b$ 是正的，因而由[p_2]知 $a\cdot(-b)$ 也是正的。但 $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$。于是 $-(a\cdot b)$ 是正的，再由[p_1]知 $a\cdot b$ 是负的。

序(Order)

我们利用正数的概念在 **R** 中定义一个序关系。

定义 设已给两个实数 a 与 b，若差 $b-a$ 是正数，则称 a **小于**(less than) b，记作 $a<b$。

几何上说，若 $a<b$ 则在实直线上 a 点的位置在 b 点的左边。下列记号也是常用的：

$b>a$，读作：b 大于 a，表示 $a<b$，

$a\leqslant b$，读作：a 小于或等于 b，表示 $a<b$ 或 $a=b$，

$b\geqslant a$，读作：b 大于或等于 a，表示 $a\leqslant b$。

例 2.1 $2<5$；$-6\leqslant-3$；$4\leqslant4$；$5>-8$。

例 2.2 实数 x 是正的 iff $x>0$；x 是负的 iff $x<0$。

例 2.3 记号 $2<x<7$ 表示 $2<x$ 同时还有 $x<7$；因此 x 位于实直线上 2 与 7 之间。

利用定义正实数的公理 $[p_1]$ 和 $[p_2]$ 可以证明下面的定理。

定理 A.2 设 a, b, c 为实数，则：

(i) 或者 $a<b$，或者 $a=b$，或者 $b<a$；

(ii) 若 $a<b$，同时 $b<c$，则 $a<c$；

(iii) 若 $a<b$，则 $a+c<b+c$；

(iv) 若 $a<b$ 同时 c 是正数，则 $ac<bc$；

(v) 若 $a<b$ 同时 c 是负数，则 $ac>bc$。

推论 A.3 实数集 **R** 按照关系 $a\leqslant b$ 成为全序集。

绝对值 (Absolute value)

实数 x 的绝对值，记作 $|x|$，其定义为：

$$|x|=\begin{cases} x & 若 x\geqslant 0 \\ -x & 若 x<0。\end{cases}$$

注意：任何实数的绝对值总是非负的，即对每个 $x\in\mathbf{R}$，$|x|\geqslant 0$。

几何上说，x 的绝对值是实直线上点 x 与原点（即点 0）之间的距离。另外，任意两点 $a,b\in\mathbf{R}$ 之间的距离是 $|a-b|=|b-a|$。

例 3.1 $|-2|=2,|7|=7,|-\pi|=\pi,|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$。

例 3.2 $|3-8|=|-5|=5$，$|8-3|=|5|=5$。

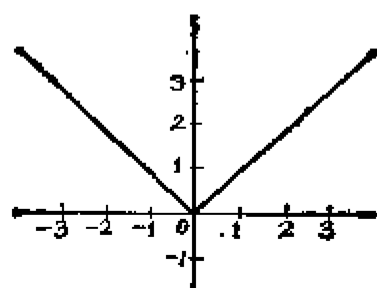
例 3.3 表达式 $|x|<5$ 表示 x 与原点之间的距离小于 5；因而 x 必须位于实直线上 -5 与 5 之间。换句话说，

$$|x|<5 \quad 与 \quad -5<x<5$$

具有相同的意义，同理，

$$|x|\leqslant 5 \quad 与 \quad -5\leqslant x\leqslant 5$$

具有相同的意义。



$f(x)=|x|$ 的图象

绝对值函数 $f(x)=|x|$ 的图象全部位于上半平面上，因为对于任何 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 0$（见图）。

绝对值函数的主要性质如下：

命题 A.4 设 a,b,c 为实数，则：

（i）$|a|\geqslant 0$；且 $|a|=0$ iff $a=0$；

（ii）$|ab|=|a||b|$；

（iii）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

（iv）$|a-b|\geqslant||a|-|b||$；

（v）$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$。

最小上界公理（Least upper bound axiom）

在第十四章中讨论一般度量空间的完备性概念。对于实

直线 **R** 来说,我们可以用这个定义：**R** 是**完备的**意思是说 **R** 满足下面的公理：

[**LUB**]（**最小上界公理**） 一个实数集 A 若有上界，则它必有最小上界，即：$\sup(A)$ 存在。

例 4.1 有理数集 **Q** 不满足最小上界公理。因为令

$$A=\{q\in\mathbf{Q}:\ q>0,\ q^2<2\}$$

即：A 是大于 0 同时小于 $\sqrt{2}$ 的所有有理数所构成，则 A 有上界，例如 5 是它的一个上界。但是它没有最小上界，即：不存在有理数 m，使 $m=\sup(A)$。注意：m 不能是 $\sqrt{2}$，因为 $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$。

利用最小上界公理来证明 **R** 是 **Archimed 有序的**：

定理 A.5（**Archimed 序公理**） 正整数集 $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 是没有上界的。

换句话说，不存在这样的实数，它是大于每个正整数的。这个定理的一个推论是：

推论 A.6 任何两个不同实数之间就有一个有理数。

区间套性质（Nested interval property）

下面的定理所讲的 **R** 的区间套性质是最小上界公理，即 **R** 的完备性的一个重要推论。

定理 A.7（**区间套性质**） 设 $I_1=[a_1, b_1]$，$I_2=[a_2, b_2]$，$\cdots$ 是一列闭的(有界)区间套，即 $I_1\supset I_2\supset\cdots$，则所有这些区间至少有一个公共点，即：

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i\neq\varnothing\,。$$

注意：定理中的区间都是闭的和有界的这些条件是必要

的，否则定理的结论不成立，如下面两例所示。

例 5.1 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是下列左开右闭区间序列：

$$A_1=(0, 1], A_2=\left(0, \frac{1}{2}\right], \cdots, A_k=\left(0, \frac{1}{k}\right], \cdots$$

这个区间序列是成套的，即每个区间包含着后一区间：$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$。但是这些区间的交是空集，即：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \varnothing,$$

于是不存在属于每个区间的公共点。

例 5.2 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是下列无界闭区间序列：

$$A_1=[1, \infty), A_2=[2, \infty), \cdots, A_k=[k, \infty), \cdots$$

则 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，即区间序列是成套的。但是不存在属于每个区间的公共点，即：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \varnothing。$$

习 题 解 答

域公理

1．求证命题 $A.1$(iv)：对任何 $a, b \in F$，

(1) $a0=0$，　　(2) $a(-b)=(-a)b=-ab$，

(3) $(-a)(-b)=ab$。

解：(1) $a0=a(0+0)=a0+a0$，两边加上 $-a0$ 即得：$0=a0$。

(2) $0=a0=a(b+(-b))=ab+a(-b)$。因此 $a(-b)$ 是 ab 的负数，那就是，$a(-b)=-ab$。

同理有，$(-a)b=-ab$。

(3) $0=(-a)0=(-a)(b+(-b))=(-a)b+(-a)\cdot(-b)=-ab+(-a)(-b)$。两边加上 ab，即得：$ab=(-a)$

$\cdot(-b)$。

2．求证域F上的乘法对于减法的分配律，即

$$a(b-c)=ab-ac。$$

解：$a(b-c)=a(b+(-c))=ab+a(-c)=ab+(-ac)$
$=ab-ac$。

3．求证域F没有零除数，即$ab=0\Longrightarrow a=0$或$b=0$。

解：假设$ab=0$及$a\neq0$，则a^{-1}存在因而

$$b=1\cdot b=(a^{-1}a)b=a^{-1}(ab)=a^{-1}0=0。$$

不等式和正数

4．把下列不等式改写成使x单独处于两个不等号之间的形式：(i) $3<2x-5<7$，　(ii) $-7<-2x+3<5$。

解：我们利用定理$A.2$：

(i) 由(iii)，我们可在$3<2x-5<7$的每边加上5得到$8<2x<12$。由(iv)我们可在每边乘以$\frac{1}{2}$得到$4<x<6$。

(ii) 在不等式每边加上-3得到$-10<-2x<2$。由(v)我们可在每边乘以$-\frac{1}{2}$，将不等式调个方向，得到$-1<x<5$。

5．求证$\frac{1}{2}$是个正数。

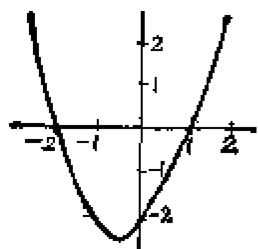
解：利用[P_1]：或者$-\frac{1}{2}$是正数，或者$\frac{1}{2}$是正数。假设$-\frac{1}{2}$是正数，因而由[P_2]，$\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$也是正数。但由例1.1，1是正数而$-1$不是正数。于是我们有了矛盾，因而$\frac{1}{2}$是正数。

6．求证：定理 $A.2$(ii)：若 $a<b$ 又 $b<c$，则 $a<c$。

解：由定义，$a<b$ 表示 $b-a$ 是正数，$b<c$ 表示 $c-b$ 是正数。现在由 $[P_2]$，和 $(b-a)+(c-b)=c-a$ 是正数，因而再由定义得 $a<c$。

7．求证定理 $A.2$(v)：若 $a<b$，c 是负数，则 $ac>bc$。

解：由定义，$a<b$ 表示 $b-a$ 是正数。由 $[P_1]$，若 c 是负数，则 $-c$ 是正数，因而由 $[P_2]$，积 $(b-a)(-c)=ac-bc$ 也是正数。因此，由定义，$bc<ac$ 或等价地说，$ac>bc$。



8．试求满足 $(x-1)(x+2)<0$ 的一切实数 x。

解：必须求出使得 $y=(x-1)(x+2)$ 是负数的 x 的一切值。因为两个数的积是负的，当且仅当其中一个数是正的而另一个数是负的，y 是负的可能有两种情况：(i) $x-1<0$ 及 $x+2>0$ 或 (ii) $x-1>0$ 及 $x+2<0$。若 $x-1>0$ 及 $x+2<0$，则 $x>1$ 同时 $x<-2$，这是不可能的。于是 y 是负的，当且仅当 $x-1<0$ 及 $x+2>0$，或 $x<1$ 同时 $x>-2$，那就是，当 $-2<x<1$ 时 y 是负的。

注意 $y=(x-1)(x+2)$ 的图象与 x 轴相交在 $x=1$ 及 $x=-2$ 处（如上图所示）。另外，图象在 x 轴下方当且仅当 y 是负的，那就是，当且仅当 $-2<x<1$ 时 y 是负的。

绝对值

9．求下列各式的值：(i) $|1-3|+|-7|$，(ii) $|-1-4|-3-|3-5|$，(iii) $||1-2|-|-6||$。

解：(i) $|1-3|+|-7|=|-2|+|-7|=2+7=9$，

(ii) $|-1-4|-3-|3-5|=|-5|-3-|-2|$
$=5-3-2=0$。

(iii) $||-2|-|-6||=|2-6|=|-4|=4$。

10. 改写下列各式使不带绝对值记号：(i) $|x-2|<5$，(ii) $|2x+3|<7$。

解：(i) $-5<x-2<5$ 或 $-3<x<7$。

(ii) $-7<2x+3<7$ 或 $-10<2x<4$
或 $-5<x<2$。

11. 改写下列各式为具有绝对值记号的不等式：
(i) $-2<x<6$， (ii) $4<x<10$。

解：首先改写每个不等式使得出现在新的不等式两端的是一个数及其反号数。(i) 在 $-2<x<6$ 的每边加上 -2 得到 $-4<x-2<4$ 它等价于 $|x-2|<4$。

(ii) 在 $4<x<10$ 每边加上 -7 得到 $-3<x-7<3$，它等价于 $|x-7|<3$。

12. 求证命题 A.4(iii)：$|a+b|\leqslant|a|+|b|$。

解：方法 1 因 $|a|=\pm a$；$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；同样也有 $-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，两式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$$

因而 $$|a+b|\leqslant||a|+|b||=|a|+|b|,$$

因为 $|a|+|b|\geqslant0$。

方法 2 由于 $ab\leqslant|ab|=|a||b|\Longrightarrow 2ab\leqslant2|a||b|$，因此

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\leqslant a^2+2|a||b|+b^2$$
$$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2。$$

但是 $\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$，因而对上面式子两边取平方根，得

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|。$$

13．求证：命题 $A.4$(v)：$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$。

解：$|a-c|=|(a-b)+(b-c)|\leqslant|a-b|+|b-c|$。

最小上界公理

14．求证定理 $A.5$（Archimed 序公理）：$\mathbf{R}$ 的子集 $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 是没有上界的。

解：假设 $\mathbf{N}$ 有上界。则由最小上界公理，$\sup(\mathbf{N})$ 存在，譬如说 $b=\sup(\mathbf{N})$，则 $b-1$ 就不是 $\mathbf{N}$ 的上界，因而：

有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $b-1<n_0$ 或 $b<n_0+1$。

但由 $n_0\in\mathbf{N}$ 可得 $n_0+1\in\mathbf{N}$，因而 b 又不是 $\mathbf{N}$ 的一个上界，这是一个矛盾，故 $\mathbf{N}$ 没有上界。

15．求证：若 a 与 b 是正实数，则有一个正整数 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $b<n_0a$。换句话说，a 的某个倍数大于 b。

解：假设 n_0 不存在，那就是 $na<b$ 对任何 $n\in\mathbf{N}$ 成立。则因为 a 是正数，$n<b/a$ 对任何 $n\in\mathbf{N}$ 成立，因而 b/a 是 $\mathbf{N}$ 的一个上界，这与定理 $A.5$（习题 14）矛盾，故 n_0 是存在的。

16．求证：若 a 是正实数，即 $0<a$，则有一个正整数 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $0<1/n_0<a$。

解：假设 n_0 不存在，即 $a\leqslant1/n$ 对于任何 $n\in\mathbf{N}$ 成立。则两边乘以正数 n/a，我们有 $n\leqslant\frac{1}{a}$ 对任何 $n\in\mathbf{N}$ 成立。因此 $\mathbf{N}$ 以 $\frac{1}{a}$ 为上界，而这是不可能的。于是，n_0 是存在的。

17．求证推论 $A.6$：任何两个不同实数 a 与 b 之间总存在着有理数 q。

解：设一个实数 a 小于另一个实数 b，即 $a<b$。

若 a 是负的而 b 是正的，则有理数 0 位于它们之间，即 $a<0<b$。

我们现在对于 a, b 都是正数的情况来证明推论，至于 a, b 都是负数的情况是同样可以证明的。a 或 b 中一个是 0 的情况可以从习题 16 得出。

由于 $a<b$ 表示 $b-a$ 是正数，因而由上一习题知

有 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $0<1/n_0<b-a$ 或 $a+(1/n_0)<b$。

我们要证存在 $\frac{1}{n_0}$* 的整数倍的数，它位于 a 与 b 之间。注意 $1/n_0<b$ 因为 $1/n_0<a+(1/n_0)<b$。由习题 15，$1/n_0$ 的某一倍数大于 b。设 m_0 是使得 $m_0/n_0\geqslant b$ 的最小正整数；因此有 $(m_0-1)/n_0<b$。我们要证

$$a<\frac{m_0-1}{n_0}<b,$$

否则 $\frac{m_0-1}{n_0}\leqslant a$ 因而 $\frac{m_0-1}{n_0}+\frac{1}{n_0}=\frac{m_0}{n_0}\leqslant a+\frac{1}{n_0}<b$，这与 m_0 的定义矛盾。于是 $(m_0-1)/n_0$ 是 a 与 b 之间的有理数。

区间套性质

18．求证定理 $A.7$（区间套性质）：设 $I_1=[a_1, b_1]$，$I_2=[a_2, b_2]$，…是一列闭的（有界）区间套，即 $I_1\supset I_2\supset\cdots$，则所有这些区间至少有一个公共点，也就是说

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i\neq\varnothing。$$

---

*译者注：原文误为 n_0。

解：由$I_1 \supset I_2 \supset \cdots$可知

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots$$
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots$$

可证：$a_m < b_n$ 对任何 $m, n \in \mathbf{N}$ 成立。

这是因为：当 $m > n$ 时有 $a_m < b_m \leqslant b_n$；

当 $m \leqslant n$ 时有 $a_m \leqslant a_n < b_n$。

于是每个 b_n 都是左端点集 $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ 的一个上界。于是由 $\mathbf{R}$ 的最小上界公理，$\sup(A)$存在，譬如说 $p = \sup(A)$。$p \leqslant b_n$ 对任何 $n \in \mathbf{N}$ 成立，因每个 b_n 是A的一个上界，而p是A的最小上界。另外，由 $p = \sup(A)$ 得 $a_n \leqslant p$ 对任何 $n \in \mathbf{N}$ 成立。但是

$$a_n \leqslant p \leqslant b_n \Longrightarrow p \in I_n = [a_n, b_n],$$

因而 p 是所有区间的公共点。

19．在上一习题中假设区间的长度趋于0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，求证对于所有的区间恰好只有一个公共点。注意：$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 表示：对于任何 $\varepsilon > 0$，

有 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得 $n > n_0 \Longrightarrow (b_n - a_n) < \varepsilon$。

解：假设 p_1 与 p_2 属于每个区间。若 $p_1 \neq p_2$，则 $|p_1 - p_2| = \delta > 0$。因 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，故存在一个区间 $I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$ 使得 I_{n_0} 的长度小于 p_1 与 p_2 之间的距离 $|p_1 - p_2| = \delta$。从而，p_1 与 p_2 不可能都属于 I_{n_0}，这是一个矛盾。于是 $p_1 = p_2$，即只可能有一个点属于每个区间。

补 充 习 题

域公理

20．求证右分配律$[D_2]$是左分配律$[D_1]$与交换律$[M_5]$

的一个推论。

21．求证有理数集 Q 关于加法和乘法运算是一个体。

22．求证如下的实数集合 A 关于加法和乘法运算是一个体：$A=\{a+b\sqrt{2}: a, b \text{ 为有理数}\}$。

23．求证偶数集 $A=\{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$ 关于加法与乘法运算满足除 $[M_3]$，$[M_4]$ 和 $[M_5]$外的所有公理，即是一个环。

不等式与正数

24．改写下列各不等式使 x 单独在两个不等号之间：

(i) $4<-2x<10$，(ii) $-1<2x-3<5$，

(iii) $-3<5-2x<7$。

25．求证：任何两个负数的积是正数。

26．求证定理 $A.2$(iii)：若 $a<b$，则 $a+c<b+c$。

27．求证定理 $A.2$(iv)：若 $a<b$，c 是正数，则 $ac<bc$。

28．求证推论 $A.3$：实数集 R 按关系 $a\leqslant b$ 成全序集。

29．求证：若 $a<b$，c 是正数，则 (i) $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$，(ii) $\frac{c}{b}<\frac{c}{a}$*。

30．求证：$\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$。更一般地，求证

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant(a_1+\cdots+a_n)/n。$$

31．求证：设 a 与 b 是实数，使对每一 $\varepsilon>0$ 有 $a<b+\varepsilon$ 则 $a\leqslant b$。

32．求满足下列不等式的所有实数值 x：

(i) $x^3+x^2-6x>0$，(ii) $(x-1)(x+3)^2\leqslant 0$。

绝对值

* 译者注：(ii)有误，当 a,b,c 均为正数时(ii)才成立。

33．求值：(i) $|-2|+|1-4|$，(ii) $|3-8|-|1-9|$，(iii) $||-4|-|2-7||$。

34．用绝对值符号改写下列各式：(i) $-3<x<9$，(ii) $2\leqslant x\leqslant 8$，(iii) $-7<x<-1$。

35．求证：(i) $|-a|=|a|$，(ii) $a^2=|a|^2$，(iii) $|a|=\sqrt{a^2}$，(iv) $|x|<a$ iff $-a<x<a$。

36．求证命题 $A.4$(ii)：$|ab|=|a||b|$。

37．求证命题 $A.4$(iv)：$||a|-|b||\leqslant|a-b|$。

最小上界公理

38．求证：设 A 是下有界的实数集，则 A 有一个最大的下界，即 $\inf(A)$ 存在。

39．求证：

(i) 设 $x\in\mathbf{R}$ 满足 $x^2<2$，则有 $n\in\mathbf{N}$ 使得 $(x+1/n)^2<2$。

(ii) 设 $x\in\mathbf{R}$ 满足 $x^2>2$，则有 $n\in\mathbf{N}$ 使得 $(x-1/n)^2>2$。

40．求证：存在一个实数 $a\in\mathbf{R}$ 使得 $a^2=2$。

41．求证：在任意两个正实数之间，存在一个具形式 r^2 的数，其中 r 是有理数。

42．求证：在任意两个实数之间，存在一个无理数。

补 充 习 题 答 案

24．(i) $-5<x<-2$，(ii) $1<x<4$，(iii) $-1<x<4$。

32．(i) $-3<x<0$ 或 $x>2$，即 $x\in(-3,0)\cup(2,\infty)$，(ii) $x\leqslant 1$。

33．(i) 5，(ii) -3，(iii) 1。

34．(i) $|x-3|<6$，(ii) $|x-5|\leqslant 3$，(iii) $|x+4|<3$。

索 引

符 号 索 引

符号	含义
(X, τ)	拓扑空间
(X, d)	度量空间
$\\|\cdots\\|$	范数
$\precsim$	粗于
$\Longrightarrow$	导致
$\exists$	存在着
$\forall$	对于所有的
$\setminus$	差（例$A\setminus B$）
A'	A的导集
$\bar{A}$ 或 A^-	A的闭包
$\mathring{A}$ 或 A°	A的内部
A^c	A的余集
$\prod\{A_i: i\in I\}$ 或$\prod_{i\in I}A_i$ 或$\prod_i A_i$	卡氏积
π_i	第i个射影函数
$\langle\cdots, \cdots\rangle$	序偶
$\varnothing$	空集
$\mathrm{b}(A)$	A的边界
$C[0, 1]$	$[0, 1]$上连续函数全体
$d(A)$	A的直径
$d(a, b)$	a到b的距离
$\mathscr{D}$	离散拓扑

符号	含义
$\mathrm{ext}(A)$	A的外部
e_x	赋值函数
$\mathscr{F}(X, Y)$	X到Y的函 所成的
$F(A, B)$	A到B的 所成的
iff	当且仅当
$\inf(A)$	A的下确
$\mathrm{int}(A)$	A的内部
$\mathbf{N}$	正整数集
$\mathscr{N}_p$	p的邻域系
$\mathscr{P}(A)$	A的势集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{R}^m$	m维欧氏空间
$\mathbf{R}^\infty$	l_2-空间
$S(p, \delta)$	开球
s.t.	使得
$\sup(A)$	A的上确界
τ	拓扑
τ_A	A上的相对拓扑
$\mathscr{U}$	通常拓
$\mathbf{Z}$	整数集